振動に関する研究」土木学会誌 V. 40 N 2.(昭. 30)

(4) 成岡,米沢:「両国橋載荷試験報告」道路 1955.5 月号

(5) 成岡,米沢:「直交異方性板理論の鋼道路橋への適用に関する研究」土木学会誌 V. 40 N. 5 (昭. 30)

(6) 米沢:「直交異方性板理論の斜桁橋構造への適用に関する研究」土木学会誌 V. 40 N. 10

(7) 米沢:「直交異方性板理論の連続桁橋構造への適用に関する研究」土木学会誌 V. 40 N. 11

(8) K. Girkmann: : Flächentragwerke 1945

熱傳達におけるL²變換の應用(第1報)

村　川　勝　彌

1. 緒　言

奥行きの短い冷却器などでは流体が管の入口へ流入すると同時に熱伝達が行はれる。すなわち、助走区間(入口部分)の熱伝達が問題となり、これは現在の伝熱学においては興味の有る課題となつている。次に非加熱助走区間を通過し終つて熱交換が起り自由対流を伴う強制流動熱伝達や、上述の助走区間の熱伝達を理論的に扱う際には熱交換の行はれる入口における流体の流速分布は一般に半径方向の函数である。著者は二重管内の助走区間の熱伝達や自由対流を伴う熱伝達を扱つて来たが、管入口における速度分布を半径方向の一般的な函数とおいて流体力学の運動方程式と熱伝達のエネルギ式とを聯立に解くことは従来の方法では解決できそうにないので新しくL²変換を熱伝達の問題に応用することを試みた。

第1報においては著者が8年前から扱つて来た自由対流熱伝達の研究の一部として二重管内における自由対流を伴う層流熱伝達[1]についてL²変換を応用した部分の要点だけを記述する。

2. 理論解析

以下においては熱伝達の理論解析の一部としてL²変換を応用するまでの道ずぢの概略を附記する。

a. 流体力学の運動方程式

$$C_r\cdot\frac{\partial C_r}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_r}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 C_r-\frac{C_r}{r^2}\right)\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$C_r\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial Z}+\nu\nabla^2 C_Z+g\beta\cdot(T-T_0)\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

連続の式 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=0$ ……………(4)

境界条件

$(C_r)_{r=r_1}=0$ ………(5), $(C_r)_{r=r_2}=0$ ………(6)

$(C_r)_{Z=0}=0$ ………(7), $(C_Z)_{r=r_1}=0$ ………(8)

$(C_Z)_{r=r_2}=0$ ………(9), $(C_Z)_{Z=0}=F(r)$[2] … (10)

b. エネルギ式

$$C_r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial T}{\partial Z}=a\cdot\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right)\cdots\cdots\cdots(11)$$

境界条件

$(T)_{r=r_1}=f_1(Z)$……(12), $(T)_{r=r_2}=f_2(Z)$……(13)

$(T)_{Z=0}=T_0$………(14)

(1)～(14) 式を聯立方程式として解いて温度Tを求めれば熱伝達の問題は解決するが特に (2) 式の

$g\beta(T-T_0)$, (10)式の $(C_Z)_{Z=0}=F(r)$,

(14)式の $(T)_{Z=0}=T_0$ の項が含まれるので解析が困難となる。

そこで(1),(2)式より圧力Pの項を消去し(2)式より $g\beta T=\int_{r_1}^{r}[\quad]\cdot dr$ を求めて (11) 式に代入してTを消去すれば積分微分方程式

(Integrodifferentialgleichung) がえられるので簡単にC_zを求めるために積分$\int_{r_1}^{r}[\quad]\cdot dr$を行って $x=(r-r_1)/(r_2-r_1)$, $z=Z/L$, $w=C_z/\bar{w}$, $t=(T-T_0)/T_0$ なる置換により無次元化して(4)式において $C_r \fallingdotseq 0$, $\therefore \frac{\partial C_z}{\partial Z} \fallingdotseq 0$ を用ひれば

$[\nabla^2\nabla^2 w]+\cdots\cdots=$(非線型項)となるので

$[\nabla^2\nabla^2 w]=\lambda[\cdots\cdots+$(非線型項)$]$, $w=w_0+\lambda\cdot w_1+\lambda^2\cdot w_2+\cdots\cdots$, (最後に$\lambda=1$とおく)

とおけば

$\nabla_0^2\nabla_0^2 w_0=0 \cdots\cdots(15)$, $(w_0)_{z=0}=f(x)\cdots\cdots(16)$,

$(w_0)_{x=0}=0\cdots\cdots(17)$, $(w_0)_{x=1}=0\cdots\cdots(18)$

$$\Delta_0^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdots\cdots(19)$$

$$f(x)=\frac{2}{[(r_2/r_1)^2+1-\{(r_2/r_1)^2-1\}/\log_e r_2/r_1}\left[1-\left\{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)x+1\right\}^2+\frac{(r_2/r_1)^2-1}{\log_e r_2/r_1}\cdot\log_e\left\{\left(\frac{r_2}{r_1}-1\right)x+1\right\}\right] \cdots\cdots(16)'$$

(16) 及び (16)′ 式の$f(x)$は二重管内の等温層流速度分布で著者が以前に求めたものである。

次に

$$w_0=u+z\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\cdots\cdots(20)$$

とおけば(15)~(18)式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots(21)$$

$(u)_{z=0}=f(x)\cdots\cdots(22)$, $(u)_{x=0}=0\cdots\cdots(23)$,

$(u)_{x=1}=0\cdots\cdots(24)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots(25)$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0}=f(x)\cdots\cdots(26)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x=0}=0\cdots\cdots(27)$,

$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{x=1}=0\cdots\cdots(28)$

$$\therefore w_0=2(1+z)\sum_{S=1}^{\infty}e^{-k_S\cdot L/(r_2-r_1)\cdot z}\cdot\frac{U_0(x,S)}{[\{r_2/(r_2-r_1)\}^2\cdot\{U_0'(k_s\cdot r_2/(r_2-r_1)\}^2-\{r_1/(r_2-r_1)\}^2\cdot\{U_0'(k_s\cdot r_1/(r_2-r_1))\}^2]}\times$$

$$\int_0^1 f(t)\cdot U_0(t,S)\cdot t\cdot dt \cdots\cdots(29)$$

$$U_0(x,S)=J_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}/J_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}-Y_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}/Y_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\} \cdots\cdots(30)$$

J_0, Y_0は、それぞれ Bessel 函数ならびに Nenmann 函数である。又k_Sは次の(31)式の根である。

$$J_0\left\{k\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}\cdot Y_0\left\{k\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}=Y_0\left\{k\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}\cdot J_0\left\{k\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\cdots\cdots(31)$$

3. L^2 變換の應用

$z=(r_2-r_1)/L\cdot y\cdots\cdots(32)$

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\cdot w_1=f_0(x,y)\cdots\cdots(33)$$

$(w_1)_{y=0}=0\cdots\cdots(34)$, $(w_1)_{x=0}=0\cdots\cdots(35)$,

$(w_1)_{x=1}=0\cdots\cdots(36)$, $w_1=(1-x)\cdot F\cdots\cdots(37)$

とおけば

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]\cdot F(x,y)=\Phi(x,y) \cdots\cdots(38)$$

(重 Poisson 方程式)

$(F)_{x=0}=0\cdots\cdots(39)$, $(F)_{y=0}=0\cdots\cdots(40)$

これは Ritz の方法（変分法）や数値解決（Wolf の方法）によつても解けるかも知れぬが 1,000回以上の操作を要するので、ここではL^2変換を応用し、かつFに対する物理的意味（F_{xx}, F_{xxx}, F_{yy}, F_{yyy}, F_{xy}, ……を消去）を考へて解を求めると次式のごとくなる。

$$F(x,y)=1/4i\int_0^x\int_0^y\int_0^\xi\lambda\cdot\Phi(\xi-\lambda,\ \eta+i\lambda)\cdot d\lambda\cdot d\xi\cdot d\eta-1/4i\int_0^x\int_0^y\int_0^\xi\lambda\cdot\Phi(\xi-\lambda,\ \eta-i\lambda)\cdot d\lambda\cdot d\xi\cdot d\eta+x^2/2\int_0^y(y-\lambda)\left\{\int_0^\lambda\Phi(-i\eta,\ \lambda-\eta)\cdot d\eta\right\}\cdot d\lambda+x^2/2\int_0^y(y-\lambda)\left\{\int_0^\lambda\Phi(i\eta,\right.$$

$$\lambda-\eta)\cdot d\eta\Big\}\cdot d\lambda-1/8\int_0^x\int_0^y\xi\Big[\int_0^{\eta-i\xi}\Phi(-i\lambda,\ \eta-i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\Big]\cdot d\xi\cdot d\eta+1/8\int_0^x\int_0^y\xi\Big[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(-i\lambda,\ \eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\Big]d\xi\cdot d\eta+1/8\int_0^x\int_0^y\xi\Big[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(i\lambda,\ \eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\Big]\cdot d\xi\cdot d\eta-\frac{1}{8}\int_0^x\int_0^y\xi\Big[\int_0^{\eta+i\xi}\Phi(i\lambda,\eta+i\xi-\lambda)\cdot d\lambda\Big]\cdot d\xi\cdot d\eta\cdots\cdots(41)$$

w_2 以下は (38), (39), (40) 式と同じ形の方程式を解けばよく (41) 式の Φ の形が変るだけである。

(38)式は弾性学などで、よく現はれる重 Poisson 方程式であるが L^2 変換を用いれば極めて簡単に解が求まる。又 L^2 変換は境界条件が複雑で、その数が多い場合とか、三次元以上の高次の偏微分方程式や、聯立偏微分方程式を解く場合に有効である。終りに此の研究は2回に渡つて交付された文部省科学研究費による研究の一部である。

注

(1) 村川勝彌; 昭和29年12月13日、日本機械学会 熱講演会 (第594回講演会) 及び、これと合同して行はれた伝熱工学研究会において発表。熱伝達については、そのときの前刷を参照。

(2) 村川勝彌; 日本機械学会論文集18巻67号 (昭和27年) 43ページの(6)式

英文題目

An Application of L^2—Transformation in Heat Transfer (1st Report), Katsuhisa MURAKAWA.

熱傳達における L^2 變換の應用 (第2報)

村 川 勝 彌

1. 緒 言

前報に続いて、著者が5年前から扱つて来た二重管内の助走区間の熱伝達研究の一部として、二重管入口における流体の速度分布を一般的に半径方向の函数と考へた場合の速度分布を求めるに当つて従来は二重管入口の条件を完全に満足させる解は、ないようであるが、ここでは L^2 変換を応用し、従来の困難を打開することが、できたので、以下に L^2 変換の応用について述べる。

2. 流体力學の基礎式

運動方程式 ;

$$C_r\cdot\frac{\partial C_r}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_r}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\sigma r}+\nu\left(\nabla^2 C_r\frac{C_r}{r^2}-\right)(1)$$

$$C_r\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial Z}+\nu\cdot\nabla^2 C_Z\cdots\cdots(2)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\cdots\cdots(3)$$

連続の式 :

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=0\cdots\cdots(4)$$

境界条件 :

$$(C_r)_{r=r_1}=0\cdots\cdots(5),\qquad (C_r)_{r=r_2}=0\cdots\cdots(6),$$

$$(C_r)_{z=0}=0\cdots\cdots(7),\qquad (C_Z)_{r=r_1}=0\cdots\cdots(8),$$

$$(C_Z)_{r=r_2}=0\cdots\cdots(9),\qquad (C_Z)_{z=0}=F(r)\cdots\cdots(10)$$

(1), (2) 式から圧力Pの項を消去し、(4)式を満足ずる流れ函数 Ψ を用ひ

$\Psi=\Psi_0+\lambda\cdot\Psi_1+\lambda^2\cdot\Psi_2+\cdots\cdots$, L = 線型項

N = 非線型項, $L(\Psi)=\lambda\cdot N(\Psi)$,

$$\left[\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial r^4}+2\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial r^2\partial Z^2}+\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial Z^4}\right]+\mu\cdot\Big\{\cdots\cdots\Big\}=0,$$

$\Psi_0=\Phi_0+\mu\cdot\Psi_1+\mu^2\cdot\Psi_2+\cdots\cdots,\ \cdots\cdots,$

$\cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,$

(最後に $\lambda=1$, $\mu=1$ とおく) とおき

$\Phi=\overline{w}\cdot(r_2-r_1)^2\cdot\phi_0$, $x=(r-r_1)/(r_2-r_1)$,

$z=Z/(r_2-r_1)$ なる置換を行へば

(1)〜(10)式は次の(11)〜(17) 式となる。

$$\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4\phi_0}{\partial z^4}=0\cdots\cdots(11)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)_{x=0}=0\cdots\cdots(12),\ \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)_{x=1}=0\cdots\cdots(13),$$