任意の座標系における電磁場への不変変分問題の応用

彌　永　　　学*

Application of the Invariant Variational Problem to Electromagnetic Fields in Arbitrary Coordinate Systems.

Manabu IYANAGA

Abstract

Noether theorem in the invariant variational problem is generalized for electromagnetic fields in arbitrary coordinate systems.

From this theorem the conservation laws for energy and momentum of electromagnetic fields in the free space are deduced.

1. まえがき

座標変換

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\delta \ (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad (1 \cdot 1)$$

を考える．（x^0 は時間座標，x^1，x^2，x^3 は空間座標である．指標はいつでも0から3までの値をとるものとする）．

ある力学系の Lagrange 関数が $L\ (x^0,\ \cdots\cdots x^3\ ;\ \dot{x}^1,\ \cdots\cdots \dot{x}^3)$（ここで・は時間微分をあらわす）により与えられ，この系の作用積分

$$S=\int_{o}^{x^0} L(x^0,\ \cdots x^3\ ;\ \dot{x}^1,\ \cdots \dot{x}^3)dx^0$$

が変換（1・1）に対して不変であるとき，この変換による作用積分の変分は零であるから，関係式

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\delta x^{\alpha}+L\cdot\delta x^0=Const. \qquad (1 \cdot 2)$$

が成立する．これが不変変分問題における Noether の定理である．

たとえば，今力学系の Lagrange の関数が

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left[(\dot{x}_i^1)^2+(\dot{x}_i^2)^2+(\dot{x}_i^3)^2\right]-U$$

（U はこの質点系のポテンシャルエネルギーであって，N 個の質点の相対位置のみの関数であるとする）によって与えられているとき，この系の作用積分は系全体の位置の移動には無関係である．

実際，変換

$$x'^0{}_i=x^0{}_i\ ,\quad x'^1{}_i=x^1{}_i+\delta x^1{}_i\ ,\quad x'^2{}_i=x^2{}_i\ ,$$
$$x'^3{}_i=x^3{}_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots N)$$

によつて作用積分は不変である．したがつて関係式（1・2）を用いて計算すると

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\,\dot{x}_i^1=Const.$$

を得る．これは運動量保存則である．

このことを一般化して次のように考えることができる．

ある物理系の作用積分が1つの連続変換に対して不変であるとき，この変換による作用積分の変分を零とおくことによつて，この系の1つの物理量の保存則を得ることができる．

我々はこの不変変分問題を metric tensor $g_{\mu\nu}(x)$ をもつた空間の上で議論し，その結果を実際に電磁場へ応用して，任意の座標系における電磁場のエネルギー・運動量保存則を導き出す．

metric tensor $g_{\mu\nu}$ は次の条件を満足していると仮定する．

1. $g_{oo}>0$
2. 任意の実数値 ω^1，ω^2，ω^3 に対して

$$\sum_{i,k=1}^{3}g_{ik}\omega^i\,\omega^k<0$$

2. 座標変換にともなう変分

無限小座標変換

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\delta x^{\alpha} \qquad (2 \cdot 1)$$

を考える．このとき

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}=\delta^{\alpha}_{\beta}+\frac{\partial\,\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \qquad (2 \cdot 2)$$

*応用数学教室

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}=\delta^\alpha_\beta-\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (2\cdot 3)$$

が成立する．ここで δ^α_β は *Kronecker* のデルターである．

この変換（2・1）による反変ベクトル A^μ および共変ベクトル A_μ の変分 δA^μ と δA_μ とを求める．

座標変換（2・1）によるベクトル A^μ と A^μ の変換は

$$A'^\mu(x')=\sum_{\alpha=0}^{3}A^\alpha(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$A'_\mu(x')=\sum_{\alpha=0}^{3}A_\alpha(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$$

である．これらの式を和の記号を取り除いて

$$A'^\mu(x')=A^\alpha(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$A'_\mu(x')=A_\alpha(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$$

と書く．（この式の α のように指標が2度現われるときには，この指標について0から3まで和を取つているものとする）このベクトルの変換式へ式（2・2）と式（2・3）を代入すると

$$A'^\mu(x')=A^\mu(x)+A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$A'_\mu(x')=A_\mu(x)-A_\alpha\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

となり，したがつて求める変分

$$\bar{\delta}A^\mu=A'^\mu(x')-A^\mu(x)=A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{\delta}A_\mu=A'_\mu(x')-A_\mu(x)=-A_\alpha\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

を得る．

つぎに反変 *metric tensor* $g^{\mu\nu}$ と共変 *metric tensor* $g_{\mu\nu}$ との変換（2・1）による変分 $\bar{\delta}g^{\mu\nu}$ および $\bar{\delta}g_{\mu\nu}$ を求める．

座標変換（2・1）による *metric tensor* の変換はそれぞれ

$$g'^{\mu\nu}(x')=g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}$$

$$g'_{\mu\nu}(x')=g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$$

である．この変換式へ式（2・2）と式（2・3）をそれぞれ代入し，2次の無限小項を無視すると

$$g'^{\mu\nu}(x')=g^{\mu\nu}(x)+g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$g'_{\mu\nu}(x')=g_{\mu\nu}(x)-g_{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\nu}-g_{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

となる．したがつて求める変分

$$\bar{\delta}g^{\mu\nu}=g'^{\mu\nu}(x')-g^{\mu\nu}(x)$$

$$=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu}=g'_{\mu\nu}(x')-g_{\mu\nu}(x)$$

$$=-g_{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\nu}-g_{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

を得る．

2階反変テンソル $F^{\mu\nu}$ と2階共変テンソル $F_{\mu\nu}$ の変換（2・1）による変分は *metric tensor* のときと同じようにして求めることができる．すなわち変分は

$$\bar{\delta}F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{\delta}F_{\mu\nu}=-F_{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\nu}-F_{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu}$$

である．

したがつてつぎの補助定理が得られる．

補助定理1.　ベクトル A^μ と A_μ，*metric tensor* $g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ ならびに2階テンソル $F^{\mu\nu}$ と $F_{\mu\nu}$ の座標変換

$$x'^\alpha=x^\alpha+\delta x^\alpha$$

による変分はそれぞれ

$$\bar{\delta}A^\mu=A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha} \qquad (2\cdot 4)$$

$$\bar{\delta}A_\mu=-A_\alpha\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad (2\cdot 5)$$

$$\bar{\delta}g^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha} \qquad (2\cdot 6)$$

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu}=-g_{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\nu}-g_{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad (2\cdot 7)$$

$$\bar{\delta}F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha} \qquad (2\cdot 8)$$

$$\bar{\delta}F_{\mu\nu}=-F_{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\nu}-F_{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad (2\cdot 9)$$

である．

3. 共変な変分

2節において得た変分は点 x' と点 x におけるテンソル（ベクトル）の値であつたから，一般にこれらの変分はテンソル（ベクトル）ではない．たとえば2階テンソル $F_{\mu\nu}$ の変分は

$$\bar{\delta}F_{\mu\nu}=F'_{\mu\nu}(x')-F_{\mu\nu}(x)$$

であつた．この式において $F'_{\mu\nu}(x')$ の x' を x でおきかえ，$F'_{\mu\nu}(x)$ と $F_{\mu\nu}(x)$ との差を考えると

$$F'_{\mu\nu}(x)-F_{\mu\nu}(x)$$

$$=F'_{\mu\nu}(x')-F_{\mu\nu}(x)$$

$$-F'_{\mu\nu}(x')+F'_{\mu\nu}(x)$$

$$=\bar{\delta}F_{\mu\nu}-\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha$$

となる．いま2次以上の無限小項を無視すると

$$\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$$

であるから

$$F'_{\mu\nu}(x)-F_{\mu\nu}(x)=\bar{\delta}F_{\mu\nu}-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha$$

を得る．したがつて点xにおけるテンソル$F'_{\mu\nu}$と$F_{\mu\nu}$との差を$\delta F_{\mu\nu}$であらわし，これを座標変換（2・1）によるテンソル$F_{\mu\nu}$の共変な変分ということにすると

$$\delta F_{\mu\nu}=\bar{\delta}F_{\mu\nu}-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha$$

である．この共変な変分がテンソルであることはいまの補助定理によつて明らかになる．

補助定理2． ベクトル A^μ と A_μ, *metric tensor* $g^{\mu\nu}$と$g_{\mu\nu}$, および2階テンソル$F^{\mu\nu}$と$F_{\mu\nu}$の共変な変分は

$$\delta A^\mu=A^\alpha\nabla_\alpha\delta x^\mu-\delta x^\alpha\nabla_\alpha A^\mu \qquad (3\cdot1)$$

$$\delta A_\mu=-A_\alpha\nabla_\mu\delta x^\alpha-\delta x^\alpha\nabla_\alpha A_\mu \qquad (3\cdot2)$$

$$\delta g^{\mu\nu}=\nabla^\mu\delta x^\nu+\nabla^\nu\delta x^\mu \qquad (3\cdot3)$$

$$\delta g_{\mu\nu}=-\nabla_\mu\delta x_\nu-\nabla_\nu\delta x_\mu \qquad (3\cdot4)$$

$$\delta F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\delta x^\nu+F^{\alpha\nu}\nabla_\alpha\delta x^\mu-\delta x^\alpha\nabla_\alpha F^{\mu\nu} \qquad (3\cdot5)$$

$$\delta F_{\mu\nu}=-F_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta x^\alpha-F_{\alpha\nu}\nabla_\mu\delta x^\alpha-\delta x^\alpha\nabla_\alpha F_{\mu\nu} \qquad (3\cdot6)$$

によつて与えられる．ここで∇_αは共変微分であつて，反変微分は共変微分より

$$\nabla^\mu=g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha$$

によつて得られる．

（証明）．式（3・1），式（3・3）および式（3・5）を証明する．式（3・2），式（3・4）および式（3・6）も同じようにして証明できる．

式（2・1）を証明する．

$$\delta A^\mu=\bar{\delta}A^\mu-\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha$$

であるから，式（2・4）を用いて

$$\delta A^\mu=A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha \qquad (3\cdot7)$$

を得る．

他方反変ベクトルδx^μとA^μの共変微分は

$$\nabla_\alpha\delta x^\mu=\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\ \delta x^\beta \qquad (3\cdot8)$$

$$\nabla_\alpha A^\mu=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\ A^\beta \qquad (3\cdot9)$$

で与えられる．ここで$\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$は *Christoffel symbol* であつて

$$\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}=\frac{1}{2}\ g^{\gamma\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma}\right) \qquad (3\cdot10)$$

である．

式（3・8）の両辺にベクトルA^αを，式（3・9）の両辺にベクトルδx^αをそれぞれかけて，αについて和をとると

$$A^\alpha\nabla_\alpha\delta x^\mu=A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\ A^\alpha\delta x^\beta \qquad (3\cdot11)$$

$$\delta x^\alpha\nabla_\alpha A^\mu=\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\ A^\beta\delta x^\alpha \qquad (3\cdot12)$$

を得る．式（3・11）より式（3・12）を引くと

$$A^\alpha\nabla_\alpha\delta x^\mu-\delta x^\alpha\nabla_\alpha A^\mu$$
$$=A^\alpha\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}A^\alpha\delta x^\beta-\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}A^\beta\ \delta x^\alpha$$

であつて　$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$　が成立するから

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}A^\alpha\ \delta x^\beta-\Gamma^\mu_{\beta\alpha}A^\beta\ \delta x^\alpha=0$$

である．したがつて式（3・7）を考えて

$$\delta A^\mu=A^\alpha\nabla_\alpha\delta x^\mu-\delta x^\alpha\nabla_\alpha A^\mu$$

を得る．式（3・1）が証明された．

式（3・3）を証明する．

$$\delta g^{\mu\nu}=\bar{\delta}g^{\mu\nu}-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha$$

であるから，式（2・6）を用いて

$$\delta g^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\ \delta x^\alpha \qquad (3\cdot13)$$

を得る．

他方反変ベクトルδx^νとδx^μの共変微分は

$$\nabla_\alpha\delta x^\nu=\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+\Gamma^{\ \nu}_{\beta\alpha}\delta x^\beta \qquad (3\cdot14)$$

$$\nabla_\alpha\delta x^\mu=\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}+\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\delta x^\beta \qquad (3\cdot15)$$

であるから，これらの式にそれぞれテンソル $g^{\mu\alpha}$ と $g^{\alpha\nu}$とをかけ，αについて和をとり，得られた式を辺々加えると

$$g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha\delta x^\nu+g^{\alpha\nu}\nabla_\alpha\delta x^\mu$$
$$=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\alpha}+g^{\mu\alpha}\Gamma^{\ \nu}_{\beta\alpha}\delta x^\beta$$
$$+g^{\alpha\nu}\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}\ \delta x^\beta \qquad (3\cdot16)$$

を得る．しかるに式（3・10）より

$$g^{\mu\alpha}\Gamma^{\ \nu}_{\beta\alpha}=\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\gamma\nu}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma}\right) \qquad (3\cdot17)$$

また

$$g^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\beta\alpha}=g^{\gamma\nu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}$$
$$=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\right) \qquad (3\cdot18)$$

を得るから，この2つの式を辺々加えて，*metric tensor* が対称であることを用いると

$$g^{\mu\alpha}\Gamma^{\ \nu}_{\beta\alpha}+g^{\alpha\nu}\Gamma^{\ \mu}_{\beta\alpha}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \qquad (3\cdot19)$$

を得る．式（3・19）の右辺を計算するために，関係式 $g^{\mu\gamma}g_{\gamma\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}$ を x^{β} について偏微分し，ふたたびこの関係式を用いると

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}+g^{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}=0 \qquad (3\cdot 20)$$

を得るから，この式を用いて式（3・19）は

$$g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}+g^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}=-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \qquad (3\cdot 21)$$

となる．

この式（3・21）を式（3・16）に代入すると

$$g^{\alpha\mu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}+g^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}=g^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+g^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}$$

となるから，式（3・13）を用いて

$$\delta g^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}+g^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}=\nabla^{\mu}\delta x^{\nu}+\nabla^{\nu}\delta x^{\mu}$$

を得る．式（3・3）が証明された．

最後に式（3・5）を証明する．

$$\delta F^{\mu\nu}=\bar{\delta}F^{\mu\nu}-\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}$$

であるから，式（2・8）を用いて

$$\delta F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha} \qquad (3\cdot 22)$$

を得る．

他方2階反変テンソル $F^{\mu\nu}$ の共変微分は

$$\nabla_{\alpha}F^{\mu\nu}=\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\beta\nu}+\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\beta} \qquad (3\cdot 23)$$

であるから，式（3・14）の両辺に $F^{\mu\alpha}$ を，式（3・15）の両辺に $F^{\alpha\nu}$ を，そして式（3・23）の両辺に $-\delta x^{\alpha}$ をかけて，α について和をとると

$$F^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\alpha}\delta x^{\beta} \qquad (3\cdot 24)$$

$$F^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}=F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\alpha\nu}\delta x^{\beta} \qquad (3\cdot 25)$$

$$-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}F^{\mu\nu}=-\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\beta\nu}\delta x^{\alpha}-\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\beta}\delta x^{\alpha} \qquad (3\cdot 26)$$

となる．式（3・24），式（3・25）および式（3・26）を辺々加えると

$$\begin{aligned}F^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}+F^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}F^{\mu\nu}&=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}\\&+\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\alpha}\delta x^{\beta}-\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\beta}\delta x^{\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\alpha\nu}\delta x^{\beta}\\&-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\beta\nu}\delta x^{\alpha}\end{aligned} \qquad (3\cdot 27)$$

を得る．しかるに $\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}=\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ であるから

$$\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\alpha}\delta x^{\beta}-\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F^{\mu\beta}\delta x^{\alpha}=0$$

$$\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\alpha\nu}\delta x^{\beta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}F^{\beta\nu}\delta x^{\alpha}=0$$

が成立する．したがつて式（3・27）は

$$F^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}+F^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\frac{\partial\delta x^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}+F^{\alpha\nu}\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}$$

となる．式（3・22）を用いて

$$\delta F^{\mu\nu}=F^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\delta x^{\nu}+F^{\alpha\nu}\nabla_{\alpha}\delta x^{\mu}-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}F^{\mu\nu}$$

を得る．式（3・5）が証明された．

4. 共変な変分 δA_{μ} と $\delta F_{\mu\nu}$ との関係

いま共変ベクトル A_{μ} が電磁場の4元ベクトルポテンシャルであり，2階共変テンソル $F_{\mu\nu}$ が電磁場であるとき関係

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

が成立する．他方共変ベクトル A_{ν} の共変微分は

$$\nabla_{\mu}A_{\nu}=\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}A_{\alpha}$$

$$\nabla_{\nu}A_{\mu}=\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}A_{\alpha}$$

であつて，$\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ であるから，これらの式を辺々引くと

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\nabla_{\mu}A_{\nu}-\nabla_{\nu}A_{\mu} \qquad (4\cdot 1)$$

を得る．

このとき電磁場の4ベクトルポテンシャル A_{μ} の共変な変分 δA_{μ} と電磁場 $F_{\mu\nu}$ の共変な変分 $\delta F_{\mu\nu}$ との間にはつぎの関係が成立する．

補助定理3． 電磁場 $F_{\mu\nu}$ の共変な変分 $\delta F_{\mu\nu}$ と4元ベクトルポテンシャル A_{μ} の共変な変分 δA_{μ} との間には関係

$$\delta F_{\mu\nu}=\nabla_{\mu}\delta A_{\nu}-\nabla_{\nu}\delta A_{\mu} \qquad (4\cdot 2)$$

が成立する．

（証明）先ずベクトルやテンソルの和，積の共変微分は通常の微分のときと同じ規則にしたがうということを注意する．

式（3・6）

$$\delta F_{\mu\nu}=-F_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\delta x^{\alpha}-F_{\alpha\nu}\nabla_{\mu}\delta x^{\alpha}-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}F_{\mu\nu}$$

を用いる．この式に式（4・1）を代入すると

$$\begin{aligned}\delta F_{\mu\nu}&=-(\nabla_{\mu}A_{\alpha}-\nabla_{\alpha}A_{\mu})\nabla_{\nu}\delta x^{\alpha}\\&-(\nabla_{\alpha}A_{\nu}-\nabla_{\nu}A^{\alpha})\nabla_{\mu}\delta x^{\alpha}\\&-\delta x^{\alpha}\nabla_{\alpha}(\nabla_{\mu}A_{\nu}-\nabla_{\nu}A_{\mu})\\&=-\nabla_{\mu}A_{\alpha}\nabla_{\nu}\delta x^{\alpha}+\nabla_{\alpha}A_{\mu}\nabla_{\nu}\delta x^{\alpha}\\&-\nabla_{\alpha}A_{\nu}\nabla_{\mu}\delta x^{\alpha}+\nabla_{\nu}A_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta x^{\alpha}\end{aligned}$$

$$-\delta x^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\mu A_\nu + \delta x^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\nu A_\mu$$

を得る． (4・3)

他方式（3・2）を用いて

$$\delta A_\nu = -A_\alpha \nabla_\nu \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\nu$$
$$\delta A_\mu = -A_\alpha \nabla_\mu \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\mu$$

であるから，これらの式に共変微分を行なうと

$$\nabla_\mu \delta A_\nu = -\nabla_\mu (A_\alpha \nabla_\nu \delta x^\alpha) - \nabla_\mu (\delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\nu)$$
$$\nabla_\nu \delta A_\mu = -\nabla_\nu (A_\alpha \nabla_\mu \delta x^\alpha) - \nabla_\nu (\delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\mu)$$

となる．上の式を辺々引き，右辺の括弧を取りはずして

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu = &-\nabla_\mu A_\alpha \nabla_\nu \delta x^\alpha + \nabla_\nu A_\alpha \nabla_\mu \delta x^\alpha \\ &-\nabla_\mu \delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\nu + \nabla_\nu \delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\mu \\ &-\delta x^\alpha \nabla_\mu \nabla_\alpha A_\nu + \delta x^\alpha \nabla_\nu \nabla_\alpha A_\mu \\ &-A_\alpha \nabla_\mu \nabla_\nu \delta x^\alpha + A_\alpha \nabla_\nu \nabla_\mu \delta x^\alpha \end{aligned} \quad (4\cdot4)$$

を得る．

式（4・3）から式（4・4）を引くと

$$\begin{aligned}&\delta F_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu) \\ &= \delta x^\alpha (\nabla_\mu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu) A_\nu \\ &\quad + \delta x^\alpha (\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) A_\mu \\ &\quad + A_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \delta x^\alpha \end{aligned} \quad (4\cdot5)$$

を得る．ところが $A_\alpha\ \delta x^\alpha$ はスカラーであるから，その共変微分は通常の偏微分に等しい．したがつて

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\ A_\alpha \delta x_\alpha = \frac{\partial^2 A_\alpha \delta x^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\alpha \delta x^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0$$

また積の共変微分を行なうと

$$\begin{aligned}&(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\alpha \delta x^\alpha \\ &= \delta x^\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A_\alpha \\ &\quad + A_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \delta x^\alpha \end{aligned}$$

であるから

$$A_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \delta x^\alpha = -\delta x^\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \cdot A_\alpha \quad (4\cdot6)$$

が成立する．この式（4・6）を式（4・5）に代入すると

$$\begin{aligned}&\delta F_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu) \\ &= \delta x^\alpha [(\nabla_\mu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu) A_\nu \\ &\quad + (\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) A_\mu \\ &\quad + (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\alpha] \end{aligned} \quad (4\cdot7)$$

を得る．この式（4・7）の大括弧の中を計算すると

$$\begin{aligned}&(\nabla_\mu \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu) A_\nu + (\nabla_\alpha \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\alpha) A_\mu \\ &\quad + (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\alpha \\ &= \nabla_\mu (\nabla_\alpha A_\nu - \nabla_\nu A_\alpha) + \nabla_\alpha (\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu) \\ &\quad + \nabla_\nu (\nabla_\mu A_\alpha - \nabla_\alpha A_\mu) \\ &= \nabla_\mu F_{\alpha\nu} + \nabla_\alpha F_{\nu\mu} + \nabla_\nu F_{\mu\alpha} \end{aligned}$$

であるから，式（4・7）は

$$\delta F_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu) = \nabla_\mu F_{\alpha\nu} + \nabla_\alpha F_{\nu\mu} + \nabla_\nu F_{\mu\alpha} \quad (4\cdot8)$$

となる．

しかるに2階共変テンソルの共変微分についての関係式

$$\nabla_\mu F_{\alpha\nu} = \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} F_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} F_{\alpha\rho}$$
$$\nabla_\alpha F_{\nu\mu} = \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} F_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} F_{\nu\rho}$$
$$\nabla_\nu F_{\mu\alpha} = \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} F_{\rho\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} F_{\mu\rho}$$

を辺々加えて，2階テンソルが反対称であることを用いると，

$$\nabla_\mu F_{\alpha\nu} + \nabla_\alpha F_{\nu\mu} + \nabla_\nu F_{\mu\alpha} = \frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \quad (4\cdot9)$$

を得る．式（4・1）を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから，式（4・9）は

$$\nabla_\mu F_{\alpha\nu} + \nabla_\alpha F_{\nu\mu} + \nabla_\nu F_{\mu\alpha} = 0 \quad (4\cdot10)$$

となり，したがつて式（4・8）は式（4・10）を用いて

$$\delta F_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu)$$

となる．補助定理が証明された．

5. 不変変分問題

任意の座標系における，荷電分布のない場合の *Maxwell* の方程式は

$$\nabla_\mu F_{\nu\alpha} + \nabla_\alpha F_{\mu\nu} + \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \quad (5\cdot1)$$
$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (5\cdot2)$$

である．またその作用積分は

$$S = \int_\Omega \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g}\,(dx) \quad (5\cdot3)$$

によつて与えられる．ここで g は *metric tensor* $g_{\mu\nu}$ の行列式で，1節で述べた $g_{\mu\nu}$ に関する条件より $g<0$ であることがわかる．(dx) は4次元の積分要素であつて

$$(dx) = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

を意味する．Ω は4次元領域である．

量 $F_{\alpha\beta}\,F_{\alpha\beta}$ はスカラーであり，また $\sqrt{-g}(dx)$ は座標変換に対して不変量であるから

$$F'_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta}=F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \qquad (5\cdot4)$$

$$\sqrt{-g'}\ (dx')\ =\sqrt{-g}(dx) \qquad (5\cdot5)$$

が成立する．したがつてまた座標変換に対して

$$\int_{\Omega'}\frac{1}{16\pi}F'_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta}\sqrt{-g'}\,(dx)$$

$$=\int_{\Omega}\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,(dx) \qquad (5\cdot6)$$

が成立する．ここで領域Ω'はxが領域Ωを動くときx'が動く4次元領域である．

ゆえに座標変換に対して作用積分は不変であり，したがつてその変分は零である．すなわち座標変換による作用積分の変分 $\bar{\delta}S$ は

$$\bar{\delta}S=0 \qquad (5\cdot7)$$

である．

さて作用積分の変分 $\bar{\delta}S$ を求める．

いま式（5・3）の被積分項を

$$\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)]=\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \qquad (5\cdot8)$$

によつてあらわすと，変分 $\bar{\delta}S$ は

$$\bar{\delta}S=\int_{\Omega'}\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')](dx')$$

$$-\int_{\Omega}\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)](dx) \qquad (5\cdot9)$$

により与えられる．式（5・9）の第1項に積分変数の変換

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}$$

を行なうと

$$\int_{\Omega'}\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')](dx')$$

$$=\int_{\Omega}\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')]\cdot\frac{D(x'^0x'^1x'^2x'^3)}{D\ \ (x^0x^1x^2x^3)}\ (dx)$$

となる．ここで右辺のx'はxの関数である．また $D(x'^0x'^1x'^2x'^3)/D(x^0x^1x^2x^3)$ は関数行列式であつて

$$\frac{D\,(x'^0x'^1x'^2x'^3)}{D\ \ (x^0x^1x^2x^3)}=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^0} & 1+\frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^1} & 1+\frac{\partial\delta x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^2} & 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

である．

この行列式で2次以上の無限小項を無視すると

$$\frac{D\,(x'^0x'^1x'^2x'^3)}{D\ \ (x^0x^1x^2x^3)}=1+\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

を得るから，変分 $\bar{\delta}S$ は

$$\bar{\delta}S=\int_{\Omega}\{\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')]$$

$$-\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)]\}(dx)$$

$$+\int_{\Omega}\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')]\cdot\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\ (dx) \qquad (5\cdot10)$$

となる．

式（5・10）の第1項の被積分項は

$$\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')]$$

$$-\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)]$$

$$=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\ \bar{\delta}g_{\mu\nu}+\ \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \bar{\delta}F_{\mu\nu}$$

となり，また第2項の被積分項は2次以上の無限小項を無視して

$$\mathfrak{L}[g'_{\mu\nu}(x'),\ F'_{\mu\nu}(x')]\ \frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$=\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)]\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

となる．さらに3節で述べたように

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu}=\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\ \delta x^{\alpha}$$

$$\bar{\delta}F_{\mu\nu}=\delta F_{\mu\nu}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\ \delta x^{\alpha}$$

であつたから，これらの式を式（5・10）に代入すると変分 $\bar{\delta}S$ は

$$\bar{\delta}S=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\bar{\delta}g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \bar{\delta}F_{\mu\nu}+\ \mathfrak{L}\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right]\cdot(dx)$$

$$=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\ \ \delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \ \delta F_{\mu\nu}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\ \delta x^{\alpha}+\mathfrak{L}\frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right]\cdot(dx)$$

となる．

最後に $\mathfrak{L}$ の x^{α} についての偏導関数が

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$$

であることを用いると

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha}+\mathfrak{L}\ \frac{\partial\delta x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\mathfrak{L}\delta x^{\alpha})$$

を得るから，結局変分 $\bar{\delta}S$ は

$$\bar{\delta}S=\int_\Omega\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathfrak{L}\delta x^\alpha)\Big](dx) \tag{5・11}$$

となる．

いま $\bar{\delta}S=0$ であること，および4次元領域Ωが任意であることを用いると

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathfrak{L}\delta x^\alpha)=0 \tag{5・12}$$

が成立する．

したがつてつぎの定理を得る．

定理1． 荷電分布がない場合の電磁場の作用積分が

$$S=\int_\Omega\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)](dx) \tag{5・13}$$

で与えられているとき，関係式

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\mathfrak{L}\delta x^\alpha)=0 \tag{5・14}$$

が成立する．ここで

$$\mathfrak{L}[g_{\mu\nu}(x),\ F_{\mu\nu}(x)]=\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha\beta}(x)\sqrt{-g\ (x)} \tag{5・15}$$

$$\delta g_{\mu\nu}=-\nabla_\mu\delta x_\nu-\nabla_\nu\delta x_\mu \tag{5・16}$$

$$\delta F_{\mu\nu}=\nabla_\mu\delta A_\nu-\nabla_\nu\delta A_\mu \tag{5・17}$$

である．

6. 電磁場のエネルギー・運動量の保存則

実際に作用積分の被積分項が式（5・15）により与えられているとき，式（5・14）を計算する．

まず $\partial\mathfrak{L}/\partial g_{\mu\nu}$ を計算する．式（5・15）を

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}=\frac{1}{16\pi}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\sqrt{-g} \tag{6・1}$$

と書きなおして，$g_{\mu\nu}$により偏微分を行なうと

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}=\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\Big[\frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial g_{\mu\nu}}g^{\beta\sigma}\sqrt{-g}+\frac{\partial g^{\beta\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}}g^{\alpha\rho}\cdot\sqrt{-g}+\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Big] \tag{6・2}$$

となる．$\partial g^{\alpha\rho}/\partial g_{\mu\nu}$ を求めるために，関係式

$$g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}=\delta^\alpha_\beta \tag{6・3}$$

を$g_{\mu\nu}$で偏微分を行なつて

$$g_{\gamma\beta}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}}+g^{\alpha\gamma}\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}=0$$

を得る．この式の両辺に$g^{\rho\beta}$をかけ，βについて和をとつて，ふたたび式（6・3）を用いると

$$g^{\rho\beta}g_{\beta\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}}+g^{\rho\beta}g^{\alpha\gamma}\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}=0$$

$$\delta^\rho_\gamma\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial g_{\mu\nu}}+g^{\rho\nu}g^{\alpha\mu}=0$$

となる．したがつて

$$\frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial g_{\mu\nu}}=-g^{\alpha\mu}g^{\rho\nu} \tag{6・4}$$

を得る．つぎに $\partial\sqrt{-g}/\partial g_{\mu\nu}$ を求める．gは *metric tensor* $g_{\mu\nu}$の行列式であるから

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g^{(\mu\nu)}$$

となる．ここで $g^{(\mu\nu)}$ は行列式gの（$\mu\nu$）要素の余因子である．式（6・3）を考慮すると

$$g^{(\mu\nu)}=gg^{\mu\nu}$$

であるから

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \tag{6・5}$$

を得る．上に得られた式（6・4）と式（6・5）を式（6・2）に代入すると

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\Big[-g^{\alpha\mu}g^{\rho\nu}g^{\beta\sigma}-g^{\beta\mu}g^{\sigma\nu}g^{\alpha\rho}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[-g^{\alpha\mu}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}-g^{\beta\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big]$$

となる．2階テンソル $F_{\alpha\beta}$，$F^{\alpha\nu}$ が反対称であることを考慮すると

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}}=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[-2g^{\alpha\mu}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[-2g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big] \tag{6・6}$$

を得る．

つぎに $\partial\mathfrak{L}/\partial F_{\mu\nu}$ を計算する．式（6・1）を$F_{\mu\nu}$について偏微分して

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial F_{\mu\nu}}=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Big[\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial F_{\mu\nu}}F_{\rho\sigma}+\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial F_{\mu\nu}}F_{\alpha\beta}\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}+g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}F^{\mu\nu} \tag{6・7}$$

を得る．

さて式（5・14）を計算する．まず式（5・14）の第1項は，式（5・16）と式（6・6）とを用いて

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}=\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[-2g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\cdot(-\nabla_\mu\delta x_\nu-\nabla_\nu\delta x_\mu)\Big]$$

$$=-\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\mu\nu}(\nabla_\mu\delta x_\nu+\nabla_\nu\delta x_\mu) \qquad (6・8)$$

となる．ここで

$$T^{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi}g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}+\frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \qquad (6・9)$$

とおいた．この$T^{\mu\nu}$は2階対称テンソルであつて，電磁場のエネギー・運動量テンソルをあらわしている．

式（6・8）は2階テンソル$T^{\mu\nu}$の対称性を用いて

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}=-\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\nabla_\nu\delta x_\mu \qquad (6・10)$$

となる．この式の右辺を計算するために，共変ベクトルδx_μの共変微分が

$$\nabla_\nu\delta x_\mu=\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x^\nu}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta x_\alpha$$

で与えられること，また関係式

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta x_\mu)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu})\delta x_\mu+\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\frac{\partial\delta x_\mu}{\partial x^\nu}$$

が成立すること，さらに2階反変テンソル$T^{\mu\nu}$の共変微分が

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu})+\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}T^{\rho\nu}$$

で与えられることを考慮すると，式（6・10）は

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta x_\mu)+\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu})\delta x_\mu+\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}T^{\rho\nu}\sqrt{-g}\,\delta x_\mu$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta x_\mu)+\nabla_\nu T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta x_\mu \qquad (6・11)$$

を得る．

つぎに式（5・14）の第2項を計算する．式（5・17）と式（6・7）および2階テンソル$F^{\mu\nu}$が反対称であることを用いると

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}=\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}F^{\mu\nu}(\nabla_\mu\delta A_\nu-\nabla_\nu\delta A_\mu)$$

$$=\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}F^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\delta A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\delta A_\mu}{\partial x^\nu}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\frac{\partial\delta A_\mu}{\partial x^\nu}$$

となる．いま関係式

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\delta A_\mu)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu})\delta A_\mu+\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\frac{\partial\delta A_\mu}{\partial x^\nu}$$

が成立すること，および反対称2階反変テンソルの共変微分が

$$\triangle_\nu F^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}) \qquad (6・12)$$

により与えられることを考慮すると

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}\delta F_{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\delta A_\mu)+\frac{1}{4\pi}\nabla_\nu F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta A_\mu \qquad (6・13)$$

を得る．

ゆえに式（5・14）は式（5・15）と式（6・11）および式（6・13）を用いて

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta x_\mu+\frac{1}{4\pi}\nabla_\nu F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta A_\mu-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\delta x_\mu\right)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\delta A_\mu\right)+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\delta x^\nu\right)=0 \qquad (6・14)$$

となる．

この式（6・14）の第3項と第4項とを計算する．式（6・9）を用いると

$$-T^{\mu\nu}\delta x_\mu=\left(\frac{1}{4\pi}g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}-\frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\cdot g_{\mu\gamma}\,\delta x^\gamma$$

$$=\frac{1}{4\pi}g_{\alpha\beta}g_{\mu\gamma}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}\delta x^\gamma-\frac{1}{16\pi}\delta^\nu_\gamma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta x^\gamma$$

$$=\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\delta x^\alpha-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta x^\gamma$$

を得るから，第3項は

$$-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\,\delta x_\mu\right)=\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\sqrt{-g}\,\delta x_\alpha\right)-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\delta x^\nu\right) \qquad (6・15)$$

となる．つぎに第4項を計算する．式（3・2）

$$\delta A_\mu = -A_\alpha \nabla_\mu \delta x^\alpha - \delta x^\alpha \nabla_\alpha A_\mu$$

において，ベクトルの積の共変微分に関する式

$$\nabla_\mu (A_\alpha \delta x^\alpha) = \nabla_\mu A_\alpha \delta x^\alpha + A_\alpha \nabla_\mu \delta x^\alpha$$

およびスカラー $A_\alpha \delta x^\alpha$ の共変微分は通常の偏微分と同じであること，すなわち

$$\nabla_\mu (A_\alpha \delta x^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(A_\alpha \delta x^\alpha)$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= -\nabla_\mu (A_\alpha \delta x^\alpha) + F_{\mu\alpha}\delta x^\alpha \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^\mu}(A_\alpha \delta x^\alpha) + F_{\mu\alpha}\delta x^\alpha\end{aligned} \tag{6・16}$$

を得る．したがつてこの式（6・16）を用いると

$$-F^{\mu\nu}\delta A_\mu = F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(A_\alpha \delta x^\alpha) - F_{\mu\alpha}F^{\mu\nu}\delta x^\alpha$$

となるから，第4項は

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\,\delta A_\mu\right) &= \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}(A_\alpha \delta x^\alpha) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(A_\alpha \delta x^\alpha) \\ &- \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\sqrt{-g}\,\delta x^\alpha\right)\end{aligned} \tag{6・17}$$

となる．さらに2階テンソル $F^{\mu\nu}$ は反対称テンソルであるから，式（6・17）の右辺の第2項は零となり，また第1項に式（6・12）と式（6・16）を用いると

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\,\delta A_\mu\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\nabla_\nu F^{\mu\nu}\cdot F_{\mu\alpha}\delta x^\alpha \\ &- \frac{1}{4\pi}\nabla_\nu F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta A_\mu \\ &- \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\sqrt{-g}\,\delta x^\alpha\right)\end{aligned} \tag{6・18}$$

を得る．

ゆえに式（6・15）と式（6・18）とを式（6・14）に代入すると，結局式（5・14）は

$$\frac{1}{4\pi}\nabla_\nu F^{\mu\nu}\cdot F_{\mu\alpha}\delta x^\alpha + \nabla_\nu T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,g_{\mu\alpha}\delta x^\alpha = 0 \tag{6・19}$$

となる．

いま電磁場 $F^{\mu\nu}$ が *Maxwell* の方程式を満足しているときには，式（5・2）が成立するから，式（6・19）は

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}\sqrt{-g}g_{\mu\alpha}\delta x^\alpha = 0$$

となる．さらに座標の変分 δx^α が任意であること，しかも独立であることを考慮すると

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{6・20}$$

が成立する．この式（6・20）が任意の座標系における電磁場のエネルギー・運動量の保存則の微分形を与えている．

つぎの定理が成立する．

定理2. 荷電分布のない自由空間での電磁場の作用積分が

$$S = \int_\Omega \frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\quad(dx)$$

により与えられているとき，電磁場のエネルギー・運動量の保存則の微分形は

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

である．ここでエネルギー・運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta} + \frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

で与えられる．

7. あ と が き

不変変分問題の立場から，任意の座標系における電磁場のエネルギー・運動量の保存則を得ることができた．

さらに重力場や量子力学系に対しても，この立場より保存則を議論することが可能であると思われる．

参 考 文 献

1）R. クーラン・D. ヒルベルト：数理物理学の方法．
2）V. Fock : The Theory of Space Time and Gravitation.

（昭和42年4月10日受理）