斜交導線間の相互インダクタンスの解析

武 平 信 夫*

An Analysis of Mutual Inductance between the Skewed Conductors

Nobuo TAKEHIRA

Abstract

Two straight conductors are not always parallel and are often skewed. F. F. Martens and G. A. Campbell studied on mutual inductance between the skewed conductors in detail. Martens found the shortest distance between them geometrically and calculated mutual inductance according to Neumann's formula. Developing the investigation of Martens, Campbell proposed the graphical solution of mutual inductance by means of the diagram of conforcal ellipses. In their analyses, it is necessary to find the shortest distance between the skewed conductors. It is difficult, beyond our expectations, to find the shortest distance. Therefore, the formulas to calculate mutual inductance without finding the shortest distance are derived.

1. 緒　　言

直線導線は常に平行に配置されるとは限らず斜交状態で配置されることも多い．斜交導線間の相互インダクタンスについては，Martens[1)]，Campbell[2)] らによる詳細な研究がある．Martens は任意の角度で斜交する導体間の最短距離を幾何学的に求め，Neumann の公式を適用して，相互インダクタンスを算出している．Campbell はそれを発展させ，共焦点楕円図表を用いて相互インダクタンスの図式解法を提案している．ところで両氏の場合には，いずれも，導線間の共通垂線たる最短距離を見い出すことが必要となるが，筆者の考えではこの最短距離の導出が意外と困難である．原則としては，解析幾何学的に扱えば最短距離を決定することは可能なはずであるが，その実行に相当困難を伴う．

そこで筆者は，導線間の最短距離を求めないですむ方法として，第2章に述べる各要素を求めることによって相互インダクタンスを計算する公式を導びいた．得られ公式から従来用いられている公式が導びかれることも示した．また計算例も示した．ここでは導線はフィラメントであると仮定した．

2. 相互インダクタンスの計算

本論に入る前に，相互インダクタンスを求める上で必要な諸要素を挙げておこう．（第1図参照）

d：導体 A_2 の軸を含む平面と導体 A_1 の軸との交点をBとし，Bから導体 A_2 に下した垂線の長さ．

θ ：$\angle$GBE

φ ：$\angle$FBG

k ：$\overline{\mathrm{HB}}$

l ：$\overline{\mathrm{BJ}}$

m ：$\overline{\mathrm{KC}}$

n ：$\overline{\mathrm{CD}}$

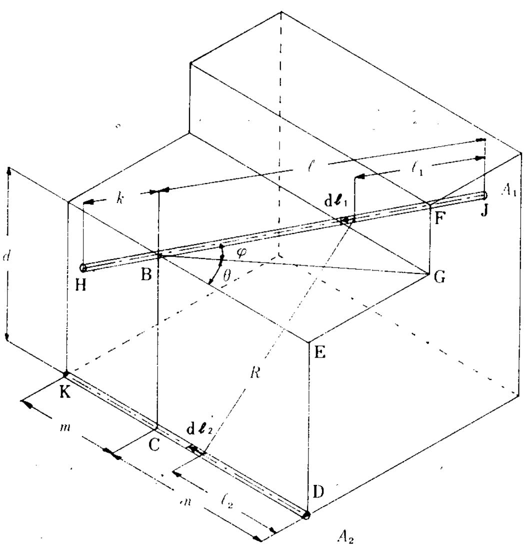

Fig. 1 Arrangement of the skewed conductors

* 電気工学教室

さて第1図において導体 A_1, A_2 上の線素ベクトルをそれぞ dl_1, dl_2 とし，両ベクトルの距離を R とすれば

$$dl_1\cdot dl_2=\cos\varphi\cos\theta\, dl_1dl_2 \tag{1}$$

$$R=\sqrt{(l-l_1)^2\cos^2\varphi+(n-l_2)^2-2(l-l_1)\times(n-l_2)\cos\varphi\cos\theta+\{(l-l_1)\sin\varphi+d\}^2} \tag{2}$$

となる．相互インダクタンスに関する Neumann の公式を用いれば，導体 A_1, A_2 間の相互インダクタンスは次式のようになる．

$$M=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{k+l}\int_0^{m+n}\frac{dl_1\cdot dl_2}{R}$$

$$=10^{-7}\times\cos\varphi\cos\theta\int_0^{k+l}\int_0^{m+n}\frac{dl_1dl_2}{\sqrt{(l-l_1)^2\cos^2\varphi+(n-l_2)^2-2(l-l_1)(n-l_2)\cos\varphi\cos\theta+\{(l-l_1)\sin\varphi+d\}^2}} \tag{3}$$

μ_0は真空中の透磁率で $4\pi\times10^{-7}$(H/m) なる値をもつ．(3)式を計算するに当ってつぎのような変数変換を行なう．

$$\Big|_0^{k+l}\ l-l_1=L_1\ \Big|_l^{-k},\quad dl_1=-dL_1 \tag{4}$$

$$\Big|_0^{m+n}\ n-l_2=L_2\ \Big|_n^{-m},\quad dl_2=-dL_2 \tag{5}$$

これらを用いると

$$M=10^{-7}\times\cos\varphi\cos\theta\int_l^{-k}\int_n^{-m}\frac{dL_1dL_2}{\sqrt{L_1^2+L_2^2-2L_1L_2\cos\varphi\cos\theta+2dL_1\sin\varphi+d^2}} \tag{6}$$

となる(6)式の2重積分を解けば，相互インダクタンスが求まる．そこで

$$M^*=\frac{M\times10^{-7}}{\cos\varphi\cos\theta}=\int_l^{-k}\int_n^{-m}\frac{dL_1dL_2}{\sqrt{L_1^2+L_2^2-2L_1L_2\cos\varphi\cos\theta+2dL_1\sin\varphi+d^2}} \tag{7}$$

とおき，まず(7)式を L_1 について定積分する．

$$\int_l^{-k}\frac{dL_1}{\sqrt{L_1^2+L_2^2-2L_1L_2\cos\varphi\cos\theta+2dL_1\sin\varphi+d^2}}$$

$$=-\ln(l-L_2\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\sqrt{l^2+L_2^2-2lL_2\cos\varphi\cos\theta+2dl\sin\varphi+d^2})$$

$$+\ln(-k-L_2\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\sqrt{k^2+L_2^2+2kL_2\cos\varphi\cos\theta-2dk\sin\varphi+d^2}) \tag{8}$$

(8)式を L_2について定積分すれば M^* が求まる．ところで(8)式の第2項は，第1項の l を $-k$ でおきかえたものに等しい．第1項の積分をM_1として計算する．

$$M_1=\int_n^{-m}\ln(l-L_2\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\sqrt{l^2+L_2^2-2lL_2\cos\varphi\cos\theta+2dl\sin\varphi+d^2})dL_2$$

$$=\int_n^{-m}\ln\{l-(L_2-l\cos\varphi\cos\theta)\cos\varphi\cos\theta-l\cos^2\varphi\cos^2\theta+d\sin\varphi$$

$$+\sqrt{l^2+(L_2-l\cos\varphi\cos\theta)^2-l^2\cos^2\varphi\cos^2\theta+2dl\sin\varphi+d^2}\}dL_2 \tag{9}$$

ここで再びつぎのように変数変換する．

$$L_2-l\cos\varphi\cos\theta=T \tag{10}$$

これを用いれば

$$M_1=\int_{n-l\cos\varphi\cos\theta}^{-m-l\cos\varphi\cos\theta}\ln(a-bT+\sqrt{T^2+C})dT \tag{11}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}a&=l-l\cos^2\varphi\cos^2\theta+d\sin\varphi\\b&=\cos\varphi\cos\theta\\c&=l^2-l^2\cos^2\varphi\cos^2\theta+2dl\sin\varphi+d^2\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(11)式の計算は少し複雑であるが求まって（付録参照）

$$M_1=\Big[\Big(T+\frac{ab}{1-b^2}\Big)\ln(a-bT+\sqrt{T^2+c})-T+\frac{2\sqrt{c(1-b^2)-a^2}}{1-b^2}\times\tan^{-1}\frac{(1-b)(T+\sqrt{T^2+c})+a}{\sqrt{c(1-b^2)-a^2}}$$

$$+\frac{a}{1-b^2}\ln\left(T+\sqrt{T^2+c}\right)\Big]_{n-l\cos\varphi\cos\theta}^{-m-l\cos\varphi\cos\theta}$$

$$=(-m+\xi\cos\varphi\cos\theta)\ln(l+m\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_1)-(n+\xi\cos\varphi\cos\theta)\ln(l-n\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_2)$$
$$+m+n+(l+\xi)\ln\frac{-m-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_1}{n-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_2}+2\xi\cot\varphi\sin\theta\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(-m-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_1)+\zeta_1}{d\cos\varphi\sin\theta}$$
$$-2\xi\cot\varphi\sin\theta\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(n-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_2)+\zeta_1}{d\cos\varphi\sin\theta} \tag{13}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=\frac{d\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi\cos^2\theta}\\
\eta_1&=\sqrt{m^2+l^2+d^2+2ml\cos\varphi\cos\theta+2dl\sin\varphi}\\
\eta_2&=\sqrt{n^2+l^2+d^2-2nl\cos\varphi\cos\theta+2dl\sin\varphi}\\
\zeta_1&=l-l\cos^2\varphi\cos^2\theta+d\sin\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

これで M_1 が求まった．もう1つ(8)式の第2項を L_2 で定積分したもの，すなわち M_2 が求まれば M^* が得られる．さきにも述べたように，この M_2 は M_1 における l を $-k$ で置き換えたもので次式となる．

$$M_2=(-m+\xi\cos\varphi\cos\theta)\ln(-k+m\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_3)$$
$$-(n+\xi\cos\varphi\cos\theta)\ln(-k-n\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_4)$$
$$+m+n+(-k+\xi)\ln\frac{-m+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_3}{n+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_4}$$
$$+2\xi\cot\varphi\sin\theta\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(-m+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_3)+\zeta_2}{d\cos\varphi\sin\theta}$$
$$-2\xi\cot\varphi\sin\theta\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(n+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_4)+\zeta_2}{d\cos\varphi\sin\theta} \tag{15}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
\eta_3&=\sqrt{m^2+k^2+d^2-2mk\cos\varphi\cos\theta-2dk\sin\varphi}\\
\eta_4&=\sqrt{n^2+k^2+d^2+2nk\cos\varphi\cos\theta-2dk\sin\varphi}\\
\zeta_2&=-k+k\cos^2\varphi\cos^2\theta+d\sin\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(7)，(8)，(13)，(15)式より

$$M=10^{-7}\times M^*\cos\varphi\cos\theta$$
$$=10^{-7}\times(-M_1+M_2)\cos\varphi\cos\theta$$
$$=10^{-7}\times\cos\varphi\cos\theta$$
$$\times\Big[(m-\xi\cos\varphi\cos\theta\ln\frac{l+m\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_1}{-k+m\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_3}+(n+\xi\cos\varphi\cos\theta)\ln\frac{l-n\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_2}{-k-n\cos\varphi\cos\theta+d\sin\varphi+\eta_4}$$
$$-(k-\xi)\ln\frac{-m+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_3}{n+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_4}-(l+\xi)\ln\frac{-m-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_1}{n-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_2}$$
$$+2\xi\cot\varphi\sin\theta\Big\{\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(-m+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_3)+\zeta_2}{d\cos\varphi\sin\theta}$$
$$-\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(-m-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_1)+\zeta_1}{d\cos\varphi\sin\theta}$$
$$-\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(n+k\cos\varphi\cos\theta+\eta_4)+\zeta_2}{d\cos\varphi\sin\theta}$$
$$+\tan^{-1}\frac{(1-\cos\varphi\cos\theta)(n-l\cos\varphi\cos\theta+\eta_2+\zeta_1}{d\cos\varphi\sin\theta}\Big\}\Big] \tag{17}$$

(17)式が求める相互インダクタンスの公式である．ところで（付6）式からもわかるように，(11)式の不定積分を求めるにあたって，$b\neq\pm1$，すなわち $\cos\varphi\cos\theta\neq\pm1$ として計算を進めた．それ故

(i) $\cos\varphi\cos\theta=1$ すなわち $\theta=0^\circ$，$\varphi=^\circ 0$ または $\theta=180^\circ$，$\varphi=180^\circ$

(ii) $\cos\varphi\cos\theta=-1$ すなわち $\theta=0^\circ$，$\varphi=180^\circ$ または $\theta=180^\circ$，$\varphi=0^\circ$

の場合には(17)式をそのまま使用することはできない．この場合には(11)式に立ち帰って考察する必要がある．つぎ

に (i), (ii) の場合の相互インダクタンスを求めてみよう．

(i) $\cos\varphi\cos\theta=1$

このとき(12)式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} a&=0\\ b&=1\\ c&=d^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

したがって(11)式の定積分は簡単に計算できて次式となる．

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{n-l}^{-m-l} \ln(-T+\sqrt{T^2+d^2})\mathrm{d}T = -(m+l)\ln\{m+l+\sqrt{(m+l)^2+d^2}\}\\ &\quad -(n-l)\ln\{-n+l+\sqrt{(n-l)^2+d^2}\}\\ &\quad +\sqrt{(m+l)^2+d^2}\\ &\quad -\sqrt{(n-l)^2+d^2} \end{aligned} \tag{19}$$

M_2 は(19)式における l を $-k$ で置き換えればよい．よって相互インダクタンスMは次式となる．

$$\begin{aligned} M&=10^{-7}(-M_1+M_2)\\ &=10^{-7}\times[(m+l)\ln\{m+l+\sqrt{(m+l)^2+d^2}\}\\ &\quad +(n-l)\ln\{-n+l+\sqrt{(n-l)^2+d^2}\}\\ &\quad -(m-k)\ln\{m-k+\sqrt{(m-k)^2+d^2}\}\\ &\quad -(n+k)\ln\{-n-k+\sqrt{(n+k)^2+d^2}\}\\ &\quad +\sqrt{(m-k)^2+d^2}\\ &\quad -\sqrt{(n+k)^2+d^2}\\ &\quad -\sqrt{(m+l)^2+d^2}\\ &\quad +\sqrt{(n-l)^2+d^2}] \end{aligned} \tag{20}$$

(ii) $\cos\varphi\cos\theta=-1$

このとき(12)式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} a&=0\\ b&=-1\\ c&=d^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

したがって(11)式の定積分は簡単に計算できて次式となる．

$$\begin{aligned} M_1&=\int_{n+l}^{-m+l} \ln(T+\sqrt{T^2+d^2})\mathrm{d}T\\ &=-(m-l)\ln\{-m+l+\sqrt{(m-l)^2+d^2}\}\\ &\quad -(n+l)\ln\{n+l+\sqrt{(n+l)^2+d^2}\}\\ &\quad -\sqrt{(m-l)^2+d^2}\\ &\quad +\sqrt{(n+l)^2+d^2} \end{aligned} \tag{22}$$

M_2は(22)式における l を $-k$ でおきかえればよい．よってこの場合の相互インダクタンス M は次式となる．

$$\begin{aligned} M&=-10^{-7}\times(-M_1+M_2)\\ &=-10^{-7}\times[(m-l)\ln\{-m+l+\sqrt{(m-l)^2+d^2}\}\\ &\quad +(n+l)\ln\{n+l+\sqrt{(n+l)^2+d^2}\}\\ &\quad -(m+k)\ln\{-m-k+\sqrt{(m+k)^2+d^2}\}\\ &\quad -(n-k)\ln\{n-k+\sqrt{(n-k)^2+d^2}\}\\ &\quad +\sqrt{(m-l)^2+d^2}\\ &\quad -\sqrt{(n+l)^2+d^2}\\ &\quad -\sqrt{(m+k)^2+d^2} \end{aligned}$$

$$+\sqrt{(n-k)^2+d^2}\Big]\qquad (23)$$

以上求めた(17), (20), (23)式を用いれば任意の角度で交叉した直線導線間の相互インダクタンスを最短距離を求めることなく計算できることになる．これらの公式は，第2図のように k, m がそれぞれ l, n 側にあっても，それぞれ $-k$, $-m$ とおくことによって使用できる．

(17)式において $\varphi=0$ とおけば，Martens が求めた結果と同一型式のもの[1]が得られる．すなわち

$$M=10^{-7}\times\cos\theta\Big[-m\ln\frac{-k+m\cos\theta+\eta_{30}}{l+m\cos\theta+\eta_{10}}$$
$$-n\ln\frac{-k-n\cos\theta+\eta_{40}}{l-n\cos\theta+\eta_{20}}$$
$$-k\ln\frac{-m+k\cos\theta+\eta_{30}}{n+k\cos\theta+\eta_{40}}$$
$$-l\ln\frac{-m-l\cos\theta+\eta_{10}}{n-l\cos\theta+\eta_{20}}$$
$$+\frac{2d}{\sin\theta}\Big\{\tan^{-1}\frac{(1-\cos\theta)(-m+k\cos\theta+\eta_{30})-k\sin^2\theta}{d\sin\theta}$$
$$-\tan^{-1}\frac{(1-\cos\theta)(-m-l\cos\theta+\eta_{10})+l\sin^2\theta}{d\sin\theta}$$
$$-\tan^{-1}\frac{(1-\cos\theta)(n+k\cos\theta+\eta_{40})-k\sin^2\theta}{d\sin\theta}$$
$$+\tan^{-1}\frac{(1-\cos\theta)(n-l\cos\theta+\eta_{20})+l\sin^2\theta}{d\sin\theta}\Big\}\Big]\qquad (24)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\eta_{10}&=\sqrt{m^2+l^2+d^2+2ml\cos\theta}\\ \eta_{20}&=\sqrt{n^2+l^2+d^2-2nl\cos\theta}\\ \eta_{30}&=\sqrt{m^2+k^2+d^2-2mk\cos\theta}\\ \eta_{40}&=\sqrt{n^2+k^2+d^2+2nk\cos\theta}\end{aligned}\right\}\qquad (25)$$

(24), (25)式の d が両導線間の最短距離を示している．

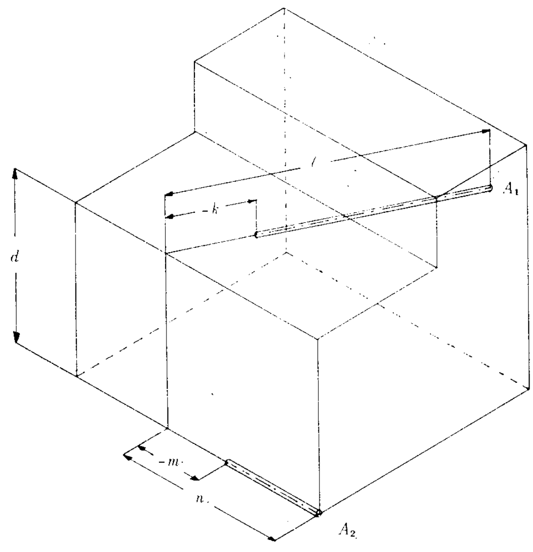

Fig.2 Arrangement of the skewed conductors

3. 計　算　例

第3図は，θ をパラメータとした場合の角度 φ と相互インダクタンス M の関係を示すものである．ここで $\theta=1°$, $46°$, $61°$, $76°$ とおき，φ を $0°$ から $360°$ まで変化させたものである．ただし $k=1$ m, $l=2$ m, $m=3$ m, $n=4$ m, $d=2$ m とした．計算に当っては，第2章の（i），（ii）のように特別の場合には(20), (23)式を用い，その他の場合には(17)式を用いた．

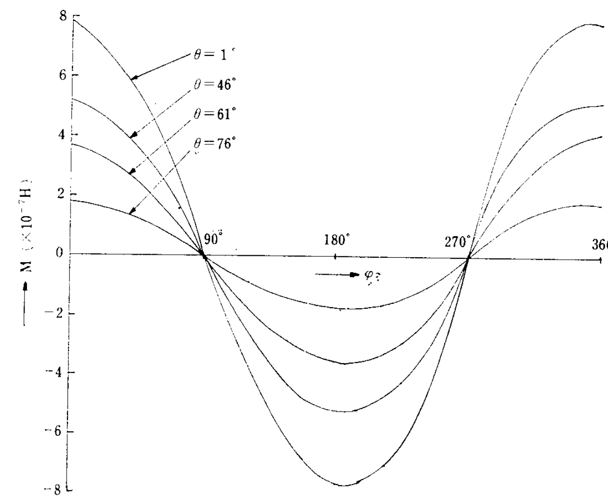

Fig.3 Relation between M and φ

4. 結　　言

以上2つの直線導線が斜交した場合について，両導線の最短距離を求めることなく相互インダクタンスを計算できる公式を導びいた．ただし本公式は Martens らの公式と違って2つの角度を知る必要がある．その意味で Martens らの公式と併用すれば，相互インダクタンスの計算にはより便利であると思う．

終りに日頃ご援助いただく戸田圭一講師に深謝の意を表する．

参 考 文 献

1) F. F. Martens : Ann. der Phys., 29, 959 (1909)
2) G. A. Campbell : Phys. Rev., 5, 452 (1915)

付 録

(11) 式の不定積分の解き方

(11)式の不定積分 I_{M1} は次式となる．

$$I_{M1}=\int \ln(a-bT+\sqrt{T^2+c})\mathrm{d}T \tag{付1}$$

（付１）式を計算するに部分積分法を用いる．以下積分定数を省略する．

$$I_{M1}=T\ln(a-bT+\sqrt{T^2+c})-T+aI_1+cI_2 \tag{付2}$$

ここに

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}T}{a-bT+\sqrt{T^2+c}} \tag{付3}$$

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}T}{\sqrt{T^2+c}(a-bT+\sqrt{T^2+c})} \tag{付4}$$

I_1，I_2を求めるに，$\sqrt{T^2+c}=t-T$ なる変数変換を行なう．

$$I_1=\frac{1}{2(1-b)}\ln\left\{(1-b)t^2+2at+c(1+b)\right\}-\frac{aI_3}{1-b}+\frac{1}{2(1+b)}\ln\frac{t^2}{(1-b)t^2+2at+c(1+b)}-\frac{aI_3}{1+b} \tag{付5}$$

ただし

$$b\neq\pm 1 \tag{付6}$$

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-b)t^2+2at+c(1+b)} \tag{付7}$$

ところで $a^2-c(1-b^2)=-d^2\cos^2\varphi\sin^2\theta<0$ であるから

$$I_3=\frac{1}{\sqrt{c(1-b^2)-a^2}}\tan^{-1}\frac{(1-b)t+a}{\sqrt{c(1-b^2)-a^2}} \tag{付8}$$

一方

$$I_2=2\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-b)t^2+2at+c(1+b)} \tag{付9}$$
$$=2I_3$$

（付５），（付８），（付９）式を（付２）式に代入して整理すれば

$$I_{M1}=\left(T+\frac{ab}{1-b^2}\right)\ln(a-bT+\sqrt{T^2+c})-T+\frac{2\sqrt{c(1-b^2)-a^2}}{1-b^2}\tan^{-1}\frac{(1-b)(T+\sqrt{T^2+c})+a}{\sqrt{c(1-b^2)-a^2}}$$
$$+\frac{a}{1-b^2}(T+\sqrt{T^2+c}) \tag{付10}$$

（昭和45年10月13日受理）