

経路積分法による系列想起モデルの想起過程

川村 正樹[†] 岡田 真人^{††,†††*}

Transient Dynamics of Sequential Associative Memory Model
by the Path-Integral Method

Masaki KAWAMURA[†] and Masato OKADA^{††,†††*}

あらまし 系列想起モデルにおける想起過程の厳密解を議論する．連想記憶モデルの想起過程を解析するための理論として，経路積分法や統計神経力学が提案されている．経路積分法は厳密解を与える理論であるが，系列想起モデルでは，定常状態しか議論されていない．我々は想起過程を議論するために，クロストークノイズの時間相関に注目し，過渡状態を含むすべての場合に適応可能な厳密解を求めた．驚くべきことに，クロストークノイズがガウス分布に従うと仮定した統計神経力学の結果とこの厳密解は一致する．クロストークノイズの正規性を調べるために，クロストークノイズ分布のキュムラントの時間発展を調べた．その結果，パターンを想起することに失敗した場合においても，3次と4次のキュムラントは0になっており，クロストークノイズが常にガウス分布に従っていることを確認した．また，理論と計算機シミュレーションより得られる想起過程の結果は一致している．更に，巨視的な不安定定常状態がセパトリックスに完全に一致していることがわかった．

キーワード 経路積分法，統計神経力学，系列想起モデル，想起過程，厳密解

1. ま え が き

連想記憶モデルには大きく分けると自己想起モデルと系列想起モデルの2種類がある．自己想起モデル [1] に対しては，平衡状態の理論 [2], [3] によってその記憶容量や相図が求められてきた．一方，系列想起モデルでは，時間的に異なるパターン系列を想起するため平衡状態は存在しない．しかしながら，巨視的に定常状態を議論することによって記憶容量や相図を求めることができる [4]．

連想記憶モデルでは記憶したパターンが想起できるかが重要であり，パターンの引込み領域や想起過程が議論されている．経路積分法 [4] ~ [8] は想起途中の状態を生成関数を用いて定式化する理論であり，想起過程の厳密解を与える理論である．Düiring ら [4] は経路

積分法を用いて想起過程の定式化を行った．しかしながら，彼らは定常状態しか解析的に求めることができなかった．一方，統計神経力学 [9] ~ [13] は想起過程の長期的な振舞いを解析することができる近似理論である．統計神経力学では入力をシグナル項とクロストークノイズに分け，クロストークノイズがガウス分布に従うと仮定する．自己想起モデルに対しては，想起が成功する場合において，クロストークノイズがガウス分布に従っていることが大規模な計算機シミュレーションにより確認されている [11], [14]．

本論文では経路積分法を用いて，系列想起モデルの想起過程の厳密解を導出する．また，統計神経力学によって，絶対零度 ($T = 0$) の場合の系列想起モデルの想起過程が求められている [15]．これまで，経路積分法と統計神経力学の関係は不明であった．そこで，導出した経路積分法による厳密解と，絶対零度の場合の統計神経力学の結果と比較し，両理論の関係を明らかにする．更に，これらの理論を用いて，想起過程の性質について議論する．

本論文は次のように構成される．まず，2. において系列想起モデルを定義する．3. において，経路積分法で系列想起モデルの定常状態を示す．更に，4. におい

[†] 山口大学理学部，山口市
Faculty of Science, Yamaguchi University, Yamaguchi-shi,
753-8512 Japan

^{††} 科学技術振興事業団 ERATO 川人学習動態脳プロジェクト，京都府
Kawato Dynamic Brain Project, ERATO, Japan Science and
Technology Corporation, Kyoto-fu, 619-0288 Japan

^{†††} 理化学研究所脳科学総合研究センター脳数理研究チーム，和光市
Laboratory for Mathematical Neuroscience, RIKEN, Brain
Science Institute, 2-1 Hirosawa, Wako-shi, 351-0198 Japan

* 現在，理化学研究所脳科学総合研究センター脳数理研究チーム

て、経路積分法を用いて系列想起モデルの想起過程を議論するために巨視的状態方程式を導出する。5.において統計神経力学を用いて、絶対零度 ($T = 0$) の場合の巨視的状態方程式を示す。6.において、系列想起モデルにおいては、経路積分法と統計神経力学からの結果が完全に一致することを示す。7.において、想起過程を理論と計算機シミュレーションより検証する。

2. 系列想起モデル

N 個のニューロンから構成される系列想起型連想記憶モデル (系列想起モデル) を考える。各ニューロンの状態は $\sigma_i(t) = \pm 1$ の値をとり、次の確率で同時に更新される。

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\sigma_i(t+1)|h_i(t)] \\ = \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(t+1) \tanh \beta h_i(t)] \end{aligned} \quad (1)$$

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} \sigma_j(t) + \theta_i(t) \quad (2)$$

ここで、 β は温度 T の逆数である。絶対零度 ($T = 0$) のとき、状態 $\sigma_i(t+1)$ は局所場 $h_i(t)$ の符号のみによって決定される。すなわち、

$$\sigma_i(t+1) = \text{sgn}[h_i(t)] \quad (3)$$

となる。また、 $\theta_i(t)$ はニューロンのしきい値、若しくは外部入力である。シナプス結合 J_{ij} は p 個のパターン $\xi^\mu = (\xi_1^\mu, \dots, \xi_N^\mu)^T$ を $\xi^1 \rightarrow \xi^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi^p \rightarrow \xi^1$ の順に想起するように記憶し、

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{\mu+1} \xi_j^\mu \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $\xi^{p+1} = \xi^1$ である。記憶パターン数 p は $p = \alpha N$ であり、 α を記憶率と呼ぶ。パターン ξ^μ の各成分は次の確率で ± 1 の値をとる。

$$\text{Prob}[\xi_i^\mu = \pm 1] = \frac{1}{2} \quad (5)$$

初期状態 $\sigma(0)$ は ξ^p に近い状態とし、時刻 s にパターン ξ^s が想起される場合を議論する。

3. 経路積分法

3.1 生成関数

Düiring ら [4] は系列想起モデルを経路積分法によって議論している。ここでは、彼らに従い有限温度モデ

ル ($T > 0$) に対する巨視的状態方程式を示す。式の導出の詳細は文献 [4] を参照されたい。

想起過程を議論するために、次の生成関数 $Z[\psi]$ を定義する。

$$\begin{aligned} Z[\psi] = \sum_{\sigma(0), \dots, \sigma(t)} p[\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(t)] \\ \times e^{-i \sum_{s < t} \sigma(s) \cdot \psi(s)} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\psi = (\psi(0), \dots, \psi(t-1))$ であり、 $\sigma(s) = (\sigma_1(s), \dots, \sigma_N(s))^T$ は時刻 s におけるネットワークの状態を示す。また、 $p[\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(t)]$ は初期状態 $\sigma(0)$ から状態 $\sigma(1), \sigma(2), \dots$ を経て時刻 t の状態 $\sigma(t)$ になる確率を示す。式 (6) からわかるように、生成関数は時刻 0 から t までにネットワークが取り得る $2^{N(t+1)}$ 個の経路に関する和をとっているため、この方法は経路積分法と呼ばれる。生成関数 $Z[\psi]$ より、モデルの巨視的な状態を表す変数として、想起しているパターンと状態の重なりを表すオーバーラップ $m(s)$ と状態の変化のしやすさを表す帯磁率 $G(s, s')$ 、状態の時間相関 $C(s, s')$ をそれぞれ次のように求めることができる。

$$m(s) = i \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^s \frac{\partial Z[\psi]}{\partial \psi_i(s)} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^s \langle \sigma_i(s) \rangle \quad (8)$$

$$G(s, s') = i \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 Z[\psi]}{\partial \psi_i(s) \partial \theta_i(s')} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \langle \sigma_i(s) \rangle}{\partial \theta_i(s')} \quad (10)$$

$$C(s, s') = - \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 Z[\psi]}{\partial \psi_i(s) \partial \psi_i(s')} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \sigma_i(s) \sigma_i(s') \rangle \quad (12)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は熱平均を表す。以上のことからわかるように、モデルの動的な巨視的性質を議論することは生成関数を求めることに帰着される。ここでは、 $N \rightarrow \infty$ の極限を考え、鞍点法 (ラプラス法) を用いて式 (6) の $Z[\psi]$ を計算する。

動作方程式 (1) より、ネットワークの状態遷移はマ

ルコフ連鎖となるので、

$$\begin{aligned}
 & p[\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(t)] \\
 &= p[\sigma(0)] \prod_{s < t} \prod_i \frac{1}{2} [1 + \sigma_i(s+1) \tanh \beta h_i(s)]
 \end{aligned} \tag{13}$$

で表すことができる。ここで、局所場 $h_i(s)$ をデルタ関数の積分形、

$$\delta(x) = \int \frac{d\hat{x}}{2\pi} e^{i\hat{x}x} \tag{14}$$

を用いて表す。また、ある時刻には一つのパターンのみが想起されているとし、非想起パターンに関する補助変数 x_μ, y_μ をデルタ関数で導入する。

$$1 = \int dh(s) \prod_i \delta \left[h_i(s) - \sum_j J_{ij} \sigma_j(s) - \theta_i(s) \right] \tag{15}$$

$$1 = \int dx \prod_{s < t} \prod_{\mu \neq s} \delta \left[x_\mu(s) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \xi_i^{\mu+1} \hat{h}_i(s) \right] \tag{16}$$

$$1 = \int dy \prod_{s < t} \prod_{\mu \neq s} \delta \left[y_\mu(s) - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \xi_i^\mu \sigma_i(s) \right] \tag{17}$$

更に、巨視的変数を以下のように導入する。

$$1 = \int \frac{dm d\hat{m}}{(2\pi/N)^t} e^{iN \sum_{s < t} \hat{m}(s) \left[m(s) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^s \sigma_i(s) \right]} \tag{18}$$

$$1 = \int \frac{dk d\hat{k}}{(2\pi/N)^t} e^{iN \sum_{s < t} \hat{k}(s) \left[k(s) - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^{s+1} h_i(s) \right]} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 1 = & \int \frac{dq d\hat{q}}{(2\pi/N)^{t^2}} \\
 & \times e^{iN \sum_{s, s' < t} \hat{q}(s, s') \left[q(s, s') - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(s) \sigma_i(s') \right]}
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 1 = & \int \frac{dQ d\hat{Q}}{(2\pi/N)^{t^2}} \\
 & \times e^{iN \sum_{s, s' < t} \hat{Q}(s, s') \left[Q(s, s') - \frac{1}{N} \sum_i \hat{h}_i(s) \hat{h}_i(s') \right]}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 1 = & \int \frac{dK d\hat{K}}{(2\pi/N)^{t^2}} \\
 & \times e^{iN \sum_{s, s' < t} \hat{K}(s, s') \left[K(s, s') - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(s) \hat{h}_i(s') \right]}
 \end{aligned} \tag{22}$$

これらの式を式(6)に代入し、 $N \rightarrow \infty$ では $Z[\psi]$ をその平均値 $\overline{Z}[\psi]$ で置き換えることができるという自己平均性を仮定する。この自己平均性の仮定以外は近似を用いないので、経路積分法は厳密であるとされている。これより、

$$\begin{aligned}
 \overline{Z}[\psi] = & \int dmd\hat{m}dkd\hat{k}dq d\hat{q}Qd\hat{Q}dKd\hat{K} \\
 & e^{N\{\Psi + \Phi + \Omega\} + O(N^{\frac{1}{2}})}
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi = & i \sum_{s < t} \left[\hat{m}(s)m(s) + \hat{k}(s)k(s) - m(s)k(s) \right] \\
 & + i \sum_{s, s' < t} \left[\hat{q}(s, s')q(s, s') + \hat{Q}(s, s')Q(s, s') \right. \\
 & \left. + \hat{K}(s, s')K(s, s') \right]
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \frac{1}{N} \sum_i \ln \left\{ \sum_{\sigma(0), \dots, \sigma(t)} p_i(\sigma(0)) \int \{ dh d\hat{h} \} \right. \\
 & \times e^{\sum_{s < t} [\beta \sigma(s+1)h(s) - \ln 2 \cosh \beta h(s)]} \\
 & \times e^{-i \sum_{s < t} \sigma(s) [\hat{m}(s)\xi_i^s + \psi_i(s)]} \\
 & \times e^{-i \sum_{s, s' < t} [\hat{q}(s, s')\sigma(s)\sigma(s') + \hat{Q}(s, s')\hat{h}(s)\hat{h}(s')]} \\
 & \times e^{-i \sum_{s, s' < t} \hat{K}(s, s')\sigma(s)\hat{h}(s')} \\
 & \left. \times e^{i \sum_{s < t} \hat{h}(s) [h(s) - \theta_i(s)\hat{k}(s)\xi_i^{s+1}] \right\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega = & \frac{1}{N} \ln \int \frac{dudv}{(2\pi)^{(p-t)t}} e^{i \sum_{\mu > t} \sum_{s < t} u_{\mu+1}(s)v_\mu(s)} \\
 & \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu > t} \sum_{s, s' < t} u_\mu(s)Q(s, s')u_\mu(s')} \\
 & \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu > t} \sum_{s, s' < t} u_\mu(s)K(s', s)v_\mu(s')} \\
 & \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu > t} \sum_{s, s' < t} v_\mu(s)K(s, s')u_\mu(s')} \\
 & \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mu > t} \sum_{s, s' < t} v_\mu(s)q(s, s')v_\mu(s')}
 \end{aligned} \tag{26}$$

と表される。

3.2 鞍点方程式

式(23)の積分値は、 $N \rightarrow \infty$ の極限で指数部 $\Psi + \Phi + \Omega$ の極値によって支配される。そこで、 $N \rightarrow \infty$ とし、鞍点方程式を導出する。積分変数 $m, \hat{k}, \hat{Q}, q, K, k, \hat{m}, \hat{q}, \hat{K}, Q$ でそれぞれ微分すると、

$s, s' < t$ に対して次の式を得る .

$$k(s) = \hat{m}(s) = 0 \quad (27)$$

$$Q(s, s') = \hat{q}(s, s') = \hat{K}(s, s') = 0 \quad (28)$$

$$\hat{k}(s) = m(s) = \langle \xi^s \langle \sigma(s) \rangle \rangle_\xi \quad (29)$$

$$q(s, s') = C(s, s') = \langle \langle \sigma(s) \sigma(s') \rangle \rangle_\xi \quad (30)$$

$$K(s, s') = iG(s, s') = \frac{\partial}{\partial \theta(s')} \langle \langle \sigma(s) \rangle \rangle_\xi \quad (31)$$

$$\hat{Q}(s, s') = -\frac{1}{2} \alpha i R(s, s') \quad (32)$$

ただし, $\langle \langle f[\{\sigma\}] \rangle \rangle_\xi$ は

$$\begin{aligned} & \langle \langle f[\{\sigma\}] \rangle \rangle_\xi \\ &= \left\langle \sum_{\sigma(0), \dots, \sigma(t)} \int \frac{dh d\hat{h}}{(2\pi)^t} p(\sigma(0)) f[\{\sigma\}] \right. \\ & \quad \times e^{\sum_{s < t} [\beta \sigma(s+1)h(s) - \ln 2 \cosh[\beta h(s)]]} \\ & \quad \times e^{i \sum_{s < t} \hat{h}(s) [h(s) - \theta(s) - m(s) \xi^{s+1}]} \\ & \quad \left. \times e^{-\frac{1}{2} \alpha \sum_{s, s' < t} R(s, s') \hat{h}(s) \hat{h}(s')} \right\rangle_\xi \quad (33) \end{aligned}$$

で定義され, $\langle \cdot \rangle_\xi$ は ξ に関する平均を表す . また ,

$$\mathbf{R} = \sum_{n \geq 0} \left[(\mathbf{G})^n \mathbf{C} (\mathbf{G}^\dagger)^n \right] \quad (34)$$

である . これより, 生成関数 $Z[\psi]$ をオーダパラメータ $m(s), C(s, s'), G(s, s')$ で表すことができる .

以上より, $h(s) = \xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + v(s) \sqrt{\alpha}$ とおくと, 巨視的状态方程式

$$\begin{aligned} m(s+1) &= \left\langle \xi^{s+1} \int \frac{dve^{-\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}}}{\sqrt{(2\pi)^t |\mathbf{R}|}} \right. \\ & \quad \left. \times \tanh \beta [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + v(s) \sqrt{\alpha}] \right\rangle_\xi \quad (35) \end{aligned}$$

$$C(s+1, s'+1)$$

$$\begin{aligned} &= \delta_{s, s'} + (1 - \delta_{s, s'}) \left\langle \int \frac{dve^{-\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}}}{\sqrt{(2\pi)^t |\mathbf{R}|}} \right. \\ & \quad \times \tanh \beta [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + v(s) \sqrt{\alpha}] \\ & \quad \left. \times \tanh \beta [\xi^{s'+1} m(s') + \theta(s') + v(s') \sqrt{\alpha}] \right\rangle_\xi \quad (36) \end{aligned}$$

$$G(s+1, s'+1)$$

$$\begin{aligned} &= \delta_{s, s'+1} \beta \left\{ 1 - \left\langle \int \frac{dve^{-\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}}}{\sqrt{(2\pi)^t |\mathbf{R}|}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \tanh^2 \beta [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + v(s) \sqrt{\alpha}] \right\rangle_\xi \right\} \quad (37) \end{aligned}$$

を得る . ここで, $\langle v(s)v(s') \rangle = R(s, s')$ より, 行列 \mathbf{R} はクロストークノイズ v の時間相関を表している . 式 (34) ~ (37) を数値的に求めることによって, ネットワークの時間発展を巨視的に議論できるはずである . しかしながら, Düringら [4] は定常状態しか解析していない . これは式 (35) ~ (37) が t 重ガウス積分を含んでいるからであると思われる . ここでは, 彼らの方法に基づいて式 (34) ~ (37) の定常解を導出しておく . まず, $C(s, s') = C(s - s'), G(s, s') = G(s - s')$ と仮定すると, $R(s, s') = R(s - s')$ となる . 更に, $t \rightarrow \infty$ で, $m(t) \rightarrow m, C(t) \rightarrow q, R(t) \rightarrow r$ に収束すると仮定する . これより, 定常状態の方程式

$$r = \frac{1}{1 - \beta^2 (1 - q)^2} \quad (38)$$

$$m = \left\langle \xi \int Dz \tanh \beta [\xi m + \theta + z \sqrt{\alpha r}] \right\rangle_\xi \quad (39)$$

$$q = \left\langle \int Dz \tanh^2 \beta [\xi m + \theta + z \sqrt{\alpha r}] \right\rangle_\xi \quad (40)$$

を得る .

4. 想起ダイナミクス

ネットワークの想起過程を議論するためには, 各時刻における $R(s, s')$ を求める必要がある . そこで, 我々は巨視的状态方程式 (34) ~ (37) を更に変形する . まず, 式 (34) において, 我々は行列 \mathbf{C} が対称行列であり, 行列 \mathbf{G} の要素が $s' = s - 1$ の場合にのみ存在することに注目した . その結果, 次のように $R(s, s')$ に関する漸化式を求めることに成功した .

$$\begin{aligned} R(s, s') &= C(s, s') \\ & \quad + G(s, s-1)G(s', s'-1)R(s-1, s'-1) \quad (41) \end{aligned}$$

これより, 各時刻における $R(s, s')$ を評価することができる .

次に、我々は以下のように t 重ガウス積分をただか 2 重のガウス積分形式に変形できることを示す。被積分関数に積分変数 $v(s-1), v(s'-1)$ のみを含むので、その他の変数に対しては積分を計算することができる。これより、 $m(s), G(s, s')$ は 1 重のガウス積分形式にすることができる。

$$m(s+1) = \left\langle \xi^{s+1} \int Dz \tanh \beta \left[\xi^s m(s) + \theta(s) + z \sqrt{\alpha R(s, s)} \right] \right\rangle_{\xi} \quad (42)$$

$$G(s+1, s) = \beta \left\{ 1 - \left\langle \int Dz \tanh^2 \beta \left[\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \sqrt{\alpha R(s, s)} \right] \right\rangle_{\xi} \right\} \quad (43)$$

ただし、 $Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ である。また、 $C(s, s')$ は時刻 s, s' に関する 2 重ガウス積分形式にすることができる。

$$C(s, s) = 1 \quad (44)$$

$$C(s+1, 0) = m(0) \left\langle \int Dz \tanh \beta \left[\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \sqrt{\alpha R(s, s)} \right] \right\rangle_{\xi} \quad (45)$$

$$C(s+1, s'+1) = \left\langle \int \frac{dz e^{-\frac{1}{2}z \hat{R}^{-1} z}}{2\pi |\hat{R}|^{\frac{1}{2}}} \times \tanh \beta \left[\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + \sqrt{\alpha} z(s) \right] \times \tanh \beta \left[\xi^{s'+1} m(s') + \theta(s') + \sqrt{\alpha} z(s') \right] \right\rangle_{\xi} \quad (46)$$

ただし、行列 \hat{R} は行列 R のうち時刻 s, s' からなる行列を表し、 $z = [z(s), z(s')]^T$ である。ここで、式 (42) より、オーバーラップ $m(s)$ を求めるためには行列 R の対角成分のみが必要であることがわかる。この場合、 $R(s, s) = C(s, s) + G^2(s, s-1)R(s-1, s-1)$ となり R の対角成分を求めるためには、行列 C の非対角項は必要ではない。

次に、導出した巨視的状态方程式から定常状態を求めてみよう。 $t \rightarrow \infty$ とすると、オーダパラメータ $m(s), G(s, s')$ はそれぞれ $m(s) \rightarrow m, G(s, s') \rightarrow$

$\beta(1-q)$ となる。また、 $C(s, s') \rightarrow 1$ より、 $R(s, s')$ は $R(s, s') \rightarrow \frac{1}{1-\beta^2(1-q)^2} = r$ となる。これより、定常状態の方程式 (38) ~ (40) と一致することがわかる。

5. 統計神経力学

統計神経力学によって、系列想起モデルに対する巨視的状态方程式は絶対零度 ($T=0$) の場合について求められている [15]。本論文では、その導出の概略を示す。統計神経力学では想起パターンとクロストークノイズ $z_i(s)$ を分離して議論する。式 (2) と式 (4) より、

$$h_i(s) = \xi_i^{s+1} m(s) + z_i(s) + \theta_i(s) \quad (47)$$

$$z_i(s) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq s}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^{\mu+1} \xi_j^{\mu} \sigma_j(s) \quad (48)$$

$$m(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^s \sigma_i(s) \quad (49)$$

となる。ここで、 $N \rightarrow \infty$ とし、クロストークノイズ $z_i(s)$ は平均 0、分散 $\rho^2(s, s)$ のガウス分布に従うと仮定する。これより、時刻 $s+1$ の想起パターンに対するオーバーラップ $m(s+1)$ は

$$m(s+1) = \left\langle \xi^{s+1} \int Dz \operatorname{sgn} \left[\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \rho(s, s) \right] \right\rangle_{\xi} \quad (50)$$

となる。

次にクロストークノイズの共分散 $\rho^2(s, s') = \overline{z_i(s) z_i(s')}$ を求めよう。状態 $\sigma_i(s)$ は ξ_i^{μ} と相関があるので、

$$\sigma_i(s) = \operatorname{sgn} \left[\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^{\nu+1} \xi_j^{\nu} \sigma_j(s-1) + \theta_i(s-1) \right] \quad (51)$$

$$= \sigma_i^{(\mu)}(s) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_k^{\mu-1} \sigma_k(s-1) \left\{ \sigma_i^{(\mu)}(s) \right\}' \quad (52)$$

と展開する。ここで、

$$\sigma_i^{(\mu)} = \operatorname{sgn} \left[\sum_{\nu \neq \mu-1}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^{\nu+1} \xi_j^{\nu} \sigma_j(s) + \theta_i(s) \right] \quad (53)$$

である．これより，式 (48) は

$$z_i(s) = \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq s}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^{\mu+1} \xi_j^\mu \sigma_j^{(\mu)}(s) \\ + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq s}^p \sum_{k=1}^N \xi_i^{\mu+1} \xi_k^{\mu-1} \sigma_k(s-1) U(s) \quad (54)$$

と表すことができる．ただし，

$$U(s+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \sigma_i^{(\mu)}(s+1) \right\}' \\ = \frac{1}{\rho(s,s)} \\ \left\langle \int Dz \text{sgn} [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \rho(s,s)] \right\rangle_\xi \quad (56)$$

である．したがって，クロストークノイズの共分散は

$$\rho^2(s,s') = \frac{\alpha}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i^{(\mu)}(s')} \\ + U(s) U(s') \overline{z_i(s-1) z_i(s'-1)} \\ + U(s') \frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq s, s'} \sum_i \xi_i^\mu \xi_i^{\mu-1} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i(s'-1)} \\ + U(s) \frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq s, s'} \sum_i \xi_i^\mu \xi_i^{\mu-1} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s') \sigma_i(s-1)} \quad (57)$$

となる．ここで，式 (52) より，式 (57) の第 3 項は，

$$\frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq s, s'} \sum_i \xi_i^\mu \xi_i^{\mu-1} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i(s'-1)} \\ = \frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq s, s'} \sum_i \xi_i^\mu \xi_i^{\mu-1} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i^{(\mu-1)}(s'-1)} \\ + U(s-1) \\ \frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq s, s'} \sum_i \xi_i^\mu \xi_i^{\mu-2} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i(s'-2)} \quad (58)$$

となる．ただし， ξ_i^μ と $\xi_i^{\mu-1}$ は $\sigma_i^{(\mu)}(s)$, $\sigma_i^{(\mu-1)}(s'-1)$ に独立であるので， $\xi_i^\mu \xi_i^{\mu-1} \overline{\sigma_i^{(\mu)}(s) \sigma_i^{(\mu-1)}(s'-1)} = 0$ となる．これより，式 (52) を繰り返し式 (58) に適用

すれば，式 (57) の第 3 項は 0 になる．また，第 4 項も同様に 0 になる．したがって，

$$\rho^2(s,s') = \alpha C(s,s') + U(s) U(s') \rho^2(s-1,s'-1) \quad (59)$$

となる．

6. 経路積分法と統計神経力学の関係

経路積分法から得られた結果と統計神経力学から得られた結果を比較しよう．ここでは，絶対零度 $T = 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) の場合を議論する． $\{\tanh[\beta x]\}' = \beta(1 - \tanh^2[\beta x])$ であり， $\beta \rightarrow \infty$ で $\tanh[\beta x] \rightarrow \text{sgn}[x]$ となるので，式 (43) は

$$G(s+1,s) = \left\langle \int Dz \left\{ \text{sgn} [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \sqrt{\alpha R(s,s)}] \right\}' \right\rangle_\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha R(s,s)}} \left\langle \int Dz \text{sgn} [\xi^{s+1} m(s) + \theta(s) + z \sqrt{\alpha R(s,s)}] \right\rangle_\xi \quad (60)$$

となる．ここで，式 (41) と式 (59) より， $\rho^2(s,s')$ と $\alpha R(s,s')$ を対応づけてみよう．この場合，式 (56) と式 (60) より， $U(s+1) = G(s+1,s)$ となる．また，式 (41) と式 (59) より， $\rho^2(s,s') = \alpha R(s,s')$ となる．更に，式 (42) と式 (50) より，オーバーラップ $m(s)$ は完全に一致する．

これより，系列想起モデルの場合はこれらの理論は同じ結果を与えることがわかる．したがって，系列想起モデルの場合は，想起に失敗する場合においてもクロストークノイズがガウス分布に従い，統計神経力学より得られた巨視的状態方程式は厳密解を与えることがわかる．

7. 想起過程

系列想起モデルの想起過程を調べてみよう．二つの理論から得られた巨視的状態方程式は一致したので，これよりは $m(s)$, $U(s)$, $\rho(s,s')$ を用いることにする．ただし，オーバーラップ $m(s)$ を求めるときには， $s' = s$ の場合だけでよいので， $\alpha r(s) = \rho^2(s,s)$ とする．ま

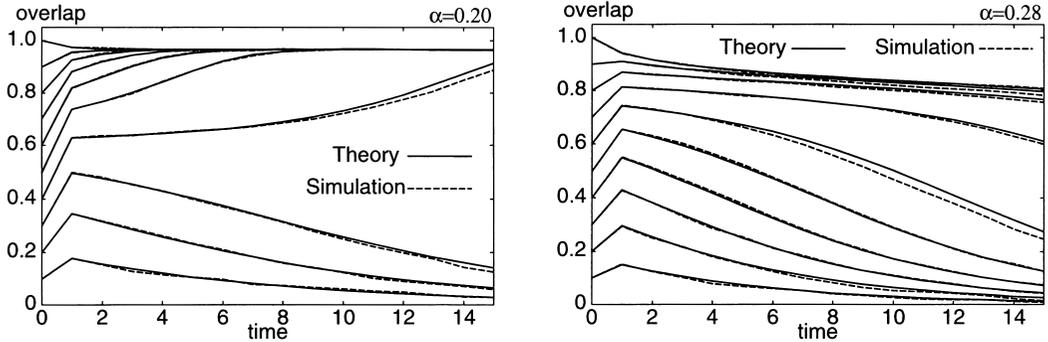


図1 記憶率 $\alpha = 0.20, 0.28$ の場合のオーバラップ $m(t)$ の時間発展を示す．実線は理論値を示し，破線は計算機シミュレーション（ニューロン数 $N = 100000$ ）の結果を示す

Fig.1 Time evolution of overlap $m(t)$ with the loading rate $\alpha = 0.20, 0.28$ are shown. Solid lines denote theoretical results and broken lines denote results by computer simulations with $N = 100000$.

た、 $\theta(s) = 0$ とし、 ξ に関する平均をとると、巨視的状態方程式は次のようになる。

$$m(s+1) = \operatorname{erf}\left(\frac{m(s)}{\sqrt{2\alpha r(s)}}\right) \quad (61)$$

$$U(s+1) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r(s)}} \exp\left(-\frac{m^2(s)}{2\alpha r(s)}\right) \quad (62)$$

$$r(s+1) = 1 + U^2(s+1)r(s) \quad (63)$$

となる。ここで、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (64)$$

である。

図1にオーバラップの時間発展を示す。実線は導出した巨視的状態方程式(61)~(63)から得た理論値であり、破線は計算機シミュレーションより得た値である。ニューロン数は $N = 100000$ であり、記憶率は $\alpha = 0.20, 0.28$ である。このときの系列想起モデルの記憶容量は $\alpha_c = 0.270$ である。これより、想起に失敗する場合や記憶容量 α_c を上回る場合についても、理論は想起過程をよく表していることがわかる。

自己想起モデルでは、想起に失敗する場合に、クロストークノイズがガウス分布に従わないことが知られている[11],[14]。しかしながら、系列想起モデルでは、経路積分法より、巨視的状態方程式がガウス積分形式で表されることが示された。また、図1より、理論と計算機シミュレーションの結果が一致しており、クロストークノイズがガウス分布に従っていることが

推測される。そこで、クロストークノイズの分布を検証するために、4次までのキュムラント C_1, C_2, C_3, C_4 を求めた。ガウス分布に従うならば、3次以上のキュムラントは0になる。キュムラントは次のように定義される。

$$C_1 = \langle x \rangle \quad (65)$$

$$C_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (66)$$

$$C_3 = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3 \quad (67)$$

$$C_4 = \langle x^4 \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 - 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle - 6\langle x \rangle^4 \quad (68)$$

ただし、確率密度を $f(x)$ とすると、 $\langle x^n \rangle$ は x の n 次モーメント

$$\langle x^n \rangle = \int dx x^n f(x) \quad (69)$$

である。 C_1, C_2 はそれぞれ平均値と分散になる。

図2にオーバラップとキュムラントの時間発展を示す。記憶率は $\alpha = 0.20, 0.28$ であり、想起に失敗する初期状態 $m(0) = 0.2$ から想起した場合を示す。実線はオーバラップ $m(t)$ とクロストークノイズの分散 $r(t)$ の理論値を示す。それぞれ計算機シミュレーションより得られたオーバラップとキュムラント C_2 に一致している。また、想起の初期から3次と4次のキュムラント C_3, C_4 は0になっており、クロストークノイズはガウス分布に従っているといえる。したがって、系列想起モデルに対しては、想起が失敗する場合や記憶容量以上の場合についても、経路積分法から得られ

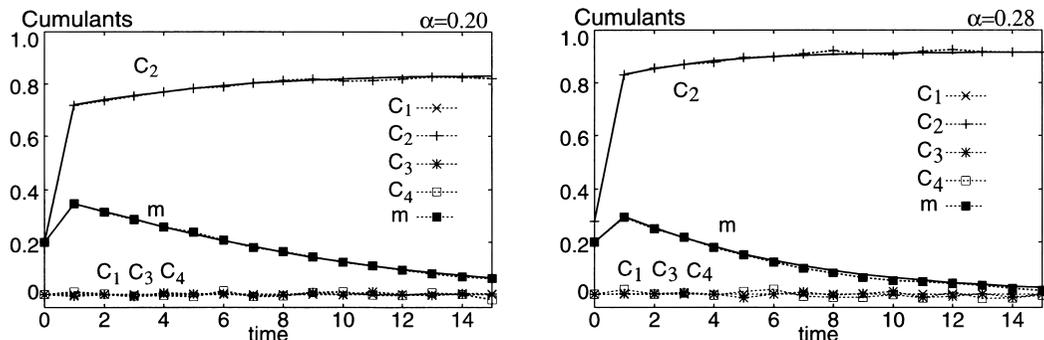


図2 記憶率 $\alpha = 0.20, 0.28$ の場合のキュムラント C_1, C_2, C_3, C_4 とオーバーラップ $m(t)$ の時間発展を示す．初期オーバーラップは $m(0) = 0.2$ である．実線は理論値を示し，破線は計算機シミュレーション（ニューロン数 $N = 100000$ ）の結果を示す
 Fig.2 Time evolution of cumulants C_1, C_2, C_3, C_4 and overlap $m(t)$ with the loading rate $\alpha = 0.20, 0.28$ are shown. Initial overlap is $m(0) = 0.2$. Solid lines denote theoretical results and broken lines denote results by computer simulations with $N = 100000$.

るとおり， $C_3 = C_4 = 0$ になる．また，統計神経力学が用いていたクロストークノイズがガウス分布に従うという仮定は，系列想起モデルに関しては常に成り立つことがわかる．

図3にオーバーラップ $m(s)$ とクロストークノイズの分散 $\alpha r(s)$ より得られる状態遷移の様子を示す．実線は理論値を示し，破線は計算機シミュレーションより得た値を示す．ニューロン数は $N = 100000$ であり，記憶率は $\alpha = 0.20$ である．図より，想起状態を示す $m \approx 1$ と非想起状態を示す $m = 0$ に安定定常状態がある．これより，想起の成否が決まる臨界オーバーラップ m_c が存在することがわかる．臨界オーバーラップ m_c 以上であれば想起に成功し，それ以下では想起に失敗する．すなわち，図3に示すように初期オーバーラップが m_c である想起過程の軌跡上にセパトリックスが存在し，そのセパトリックスを時刻 $t = 1$ で通過する．一般的には，巨視的状态方程式 (38) ~ (40) の不安定解は，動作方程式 (1) のセパトリックスには一致しないが，図中の十字で示すように，この系については両者が一致することがわかった．

図4に引込み領域を示す．横軸は記憶率 α を示し，縦軸はオーバーラップを示す．実線は理論から得られた値であり，下側の線が臨界オーバーラップ m_c を示す．また，上側の線は記憶パターン自身を初期状態として与えたとき ($m(0) = 1$) の定常状態におけるオーバーラップ m_∞ を示す． m_c と m_∞ が一致する記憶率が記憶容量 α_c を与える．この m_c と m_∞ で囲まれた領域が引込み領域である．破線は式 (38) ~ (40) の不安定

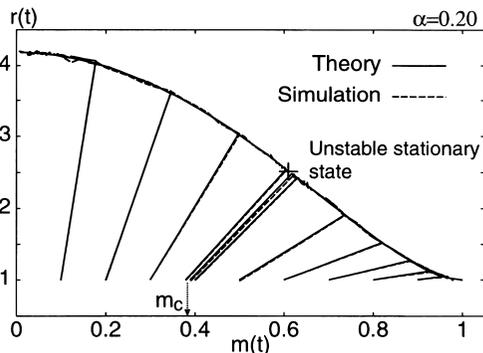


図3 記憶率 $\alpha = 0.20$ の場合のオーバーラップ $m(t)$ とクロストークノイズの分散 $r(t)$ を示す．実線は理論値を示し，破線は計算機シミュレーション ($N = 100000$) の結果を示す．初期オーバーラップは $m(0) = 0.10, \dots, 0.30, 0.38, 0.39, 0.40, \dots, 1.0$ である
 Fig.3 Overlap $m(t)$ and variance of crosstalk noise $r(t)$ with $\alpha = 0.20$ are shown. Solid lines denote theoretical results and broken lines denote results by computer simulations with $N = 100000$. The initial overlap is $m(0) = 0.10, \dots, 0.30, 0.38, 0.39, 0.40, \dots, 1.0$.

解を与える m を示している．エラーバーは計算機シミュレーションより臨界オーバーラップ m_c と m_∞ を11回求め，そのメジアンと第1，第3の4分位数の値を示す．ニューロン数は $N = 10000$ である．これより，引込み領域は理論によって定量的に求められていることがわかる．

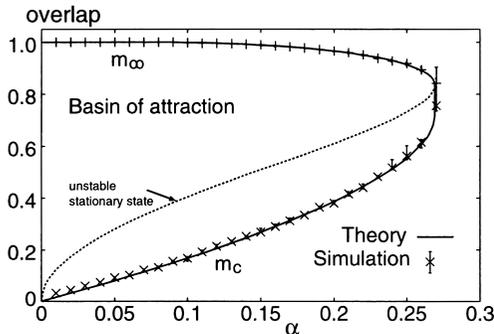


図4 実線は引込み領域の理論値を示し、エラーバーは11回の計算機シミュレーション ($N = 10000$) より得られたメジアンと第1, 第3の4分位数の値を示す
 Fig. 4 Solid line denotes basin of attraction obtained by the theory. Error bars denote median, and first and third quartile over 11 trials by computer simulations with $N = 10000$.

8. むすび

経路積分法は厳密解を与える理論である。Düringら [4] は経路積分法を用いて、系列想起モデルの定常状態を議論した。しかしながら、想起過程については議論していない。モデルの動的な特性を知るためにはモデルの想起過程について議論する必要がある。そこで、我々は系列想起モデルの想起過程を経路積分法 [4]~[8] を用いて解析した。想起過程を議論するために、クロストークノイズの時間相関を詳細に調べた結果、時間相関に関する漸化式を導出することに成功した。また、巨視的状态方程式をたかだか2重のガウス積分形式にできることを示した。これにより、各時刻における巨視的状态方程式を求めることができ、想起に失敗する場合を含むすべての場合の想起過程を厳密に議論することができた。

統計神経力学はクロストークノイズがガウス分布に従うと仮定する近似理論である。絶対零度 ($T = 0$) の場合の系列想起モデルの巨視的状态方程式は、統計神経力学で導出されている [15]。そこで、経路積分法と統計神経力学より得られた巨視的状态方程式を比較した。その結果、系列想起モデルの場合にはそれらが完全に一致することがわかった。

系列想起モデルに対しては、経路積分法により、いかなる場合でもクロストークノイズはガウス分布に従うことが示された。そこで、計算機シミュレーションを行い、クロストークノイズの分布を調べた。4次までのキウムラントを求めた結果、3次と4次のキウム

ラントは0となりガウス分布に従っていることが確認できた。これより、系列想起モデルに対しては、統計神経力学は厳密解を与えていることが証明された。

想起の成功と失敗を分ける臨界オーバーラップ m_c を求め、引込み領域を求めた。その結果、理論と計算機シミュレーションの結果はよく一致し、想起過程を定量的に議論できることがわかった。更に、想起過程をオーバーラップ $m(s)$ とクロストークノイズの分散 $r(s)$ を用いた (m, r) -平面上で状態遷移を解析すると、セバトリックスが存在し、定常状態の方程式から得られる不安定解に一致した。

本論文では、経路積分法で有限温度モデルの巨視的状态方程式を導出した。更に、統計神経力学と比較するために、絶対零度の場合の想起過程を議論した。今後、有限温度モデルの想起過程を議論する予定である。

文 献

- [1] J.J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol.79, pp.2554-2558, 1982.
- [2] D.J. Amit, H. Gutfreund, and H. Sompolinsky, "Information storage in neural networks with low levels of activity," Phys. Rev. A, vol.35, no.6, pp.2293-2303, 1987.
- [3] M. Shiino and T. Fukai, "Self-consistent signal-to-noise analysis and its application to analogue neural networks with asymmetric connections," J. Phys. A, Math. Gen., vol.25, pp.L375-L381, 1992.
- [4] A. Düring, A.C.C. Coolen, and D. Sherrington, "Phase diagram and storage capacity of sequence processing neural networks," J. Phys. A, Math Gen., vol.31, pp.8607-8621, 1998.
- [5] H.J. Sommers, "Path-integral approach to Ising spin-glass dynamics," Phys. Rev. Lett., vol.58, no.12, pp.1268-1271, 1987.
- [6] E. Gardner, B. Derrida, and P. Mottishaw, "Zero temperature parallel dynamics for infinite range spin glasses and neural networks," J. Physique, vol.48, pp.741-755, 1987.
- [7] S. Gomi and F. Yonezawa, "A new perturbation theory for the dynamics of the Little-Hopfield model," J. Phys. A, Math. Gen., vol.28, pp.4761-4775, 1995.
- [8] H. Koyama, N. Fujie, and H. Seyama, "Results from the Gardner-Derrida-Mottishaw theory of associative memory," Neural Networks, vol.12, pp.247-257, 1999.
- [9] S. Amari and K. Maginu, "Statistical neurodynamics of associative memory," Neural Networks, vol.1, pp.63-73, 1988.
- [10] A.E. Patrick and V.A. Zagrebnov, "A probabilistic approach to parallel dynamics for the Little-Hopfield

- model,” J. Phys. A, Math. Gen., vol.24, pp.3413–3426, 1991
- [11] H. Nishimori and T. Ozeki, “Retrieval dynamics of associative memory of the Hopfield type,” J. Phys. A, Math. Gen., vol.26, pp.859–871, 1993.
- [12] M. Okada, “A hierarchy of macrodynamical equations for associative memory,” Neural Networks, vol.8, no.6, pp.833–838, 1995.
- [13] M. Kawamura, M. Okada, and Y. Hirai, “Dynamics of selective recall in an associative memory model with one-to-many associations,” IEEE Trans. Neural Networks, vol.10, no.3, pp.704–713, 1999.
- [14] T. Ozeki and H. Nishimori, “Noise distributions in retrieval dynamics of the Hopfield model,” J. Phys. A, Math. Gen., vol.27, pp.7061–7068, 1994.
- [15] S. Amari, “Statistical neurodynamics of various versions of correlation associative memory,” Proc. IEEE Conference on Neural Networks, vol.1, pp.633–640, 1988.

(平成12年12月27日受付)



川村 正樹 (正員)

平6筑波大・第三・情報卒・平8同大大学院修士課程了・平11同大学院博士課程了・博士(工学)・現在山口大・理助手・ニューラルネットワーク,記憶に関する研究に従事・日本神経回路学会,日本物理学会各会員。



岡田 真人 (正員)

昭60阪市大・理・物理卒・昭62阪大大学院前期課程了・同年三菱電機(株)入社・平3阪大・基礎工・生物工助手・平8年10月科学技術振興事業団・川人学習動態脳プロジェクト研究員・平13年4月理化学研究所・脳科学総合研究センター・脳数理研究チーム副チームリーダー・平12年1月日本神経回路学会理事・博士(理学)・物性物理,統計力学,半導体,神経回路モデル,計算論的神経科学,統計的学習理論,画像処理,符合理論の研究・開発に従事・平6,8神経回路学会研究賞,平9(社)計測自動制御学会生体・生理工学部会研究奨励賞受賞,第17回AVIRG(視聴覚情報研究会)賞他受賞・Society for Neuroscience,計測自動制御学会,日本神経回路学会,日本神経科学会,日本物理学会各会員。