

J-積分法を用いた場合の有限要素法による 応力拡大係数 K_I の精度について*

清水 茂俊**・河野 俊一**・中島 敏昭***

A Consideration on the Finite Element Method for Calculating Stress Intensity Factor K_I using the J -Integral Method

by

Shigetoshi SHIMIZU, Shunichi KAWANO,
and Toshiaki NAKASIMA

Abstract

In determining the stress intensity factor K_I , the direct application of the finite element method gives poor results in the accuracy, but the J -Integral method developed by Rice can be expected somewhat good accuracy for relatively coarse meshes.

Recently Yamamoto et al. have proposed a calculation method based on superposition of analytical and finite element solution. They obtained fairly good results.

The purpose of this paper is to get good accuracy for extremely coarse meshes by the application of J -Integral method to the superposition method.

The numerical calculations were performed for such three cases as center cracked, symmetrical edge cracked and single edge cracked rectangular plates (aspect ratio, $L/W=1.4$) using 215, 110 and 35 meshes.

The calculated values for the correction factor, $F(a/W)$ were obtained within 1~3% against the exact solution for every cases.

1. 緒 言

Irwin 等¹⁾の提案した応力拡大係数 K 値に対する研究が近年急速に発達し、 K 値に対する理論的研究も多くの著者等^{2)~12)}によってなされている。しかし複雑な境界条件の場合 K 値を理論的に求めるのは、一般に極めて困難であるので、数値的に求める一方法として有限要素法が用いられるようになった。Anderson 等¹³⁾は有限要素法を用いて直接法とエネルギー法の比較を行ない、直接法は微細な要素分割にもかかわらずエネルギー法に比して精度が極めて悪いことを指摘している。

エネルギー法については Dixon 等¹⁴⁾が異なった境界条件のもとに K_I 値を推定しているが、精度は一応満

足できるもののその手段は極めて繁雑である。また、亀裂先端に特殊要素を挿入する方法が Wilson 等¹⁵⁾によって報告され、その精度の向上は認められるが、特殊要素を使用するという不便さは残る。最近、山本等^{16)~20)}は亀裂近傍の応力を解析的に表わす解析解と有限要素法との解を重ね合わせることによって微細な要素分割を行わずに精度の高い K 値が得られたことを報告している。

一方、Rice²¹⁾は J 積分法を提案し、亀裂を囲む部分の J 値がエネルギー解放率と等価であることを理論的に証明し、その応用例²²⁾として亀裂先端に微小半径の塑性域を含む場合について K 値を求めている。また異種の材料をつなぎ合せた場合の K 値を J 積分法と有限要素法により Leverenz²³⁾は求めている。しかし以上述べた方法では、かなり要素分割を細かくしない

* 日本機械学会講演論文集No. 735-2 (73-11. 中国・四国支部鳥取地方講演会) に一部発表。

** 機械工学科

*** 大学院工学研究科機械工学専攻

とよい精度は得られていない。

本報告は山本等の用いた亀裂近傍の応力を表わす、解析解と有限要素法の解を重ね合わせる方法に J 積分法を用いて、解の精度の向上をはかると共に、要素分割数を少なくした場合について、その精度の比較検討を試みたもので、解析解として Westergaard の解²⁴⁾を用いて極めてよい結果が得られた。

2. 基礎式の導入

応力拡大係数 K_I を求める場合直接有限要素法を用いても精度は悪いが、Rice の J 積分法を用いると、比較的粗い要素分割でもかなりの精度が期待できる。しかし要素分割を極端に少なくした場合、 J 積分法を使っても精度が悪くなるので、次のように重ね合わせ法を適用する。

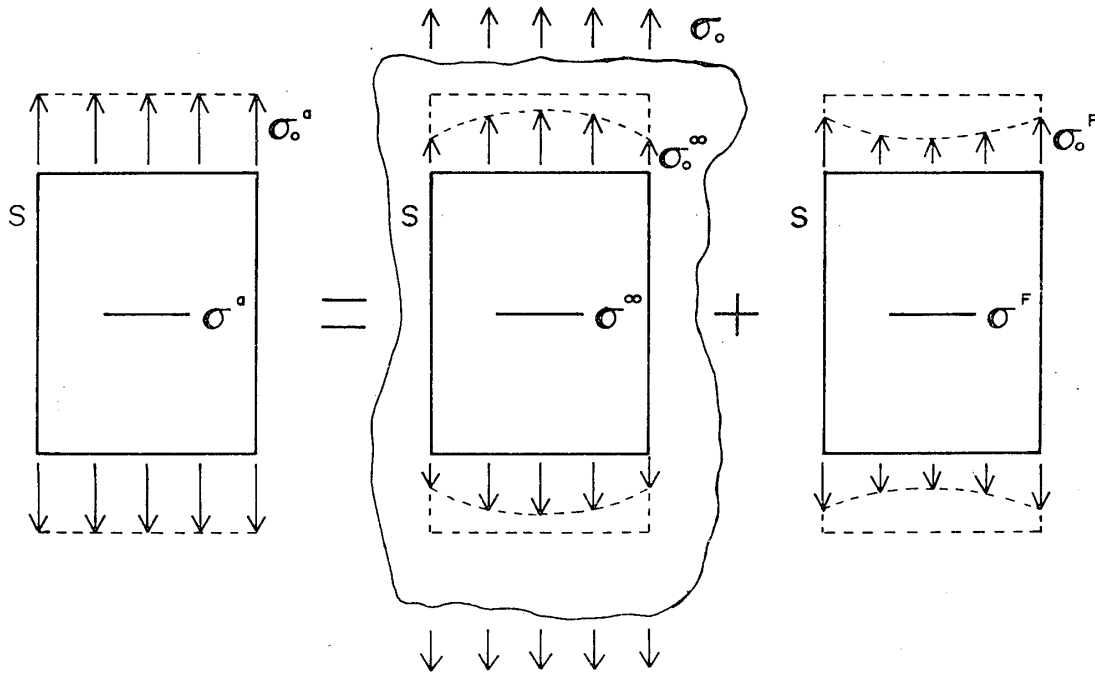


Fig. 1 The superposition method based on analytical and finite element solution

Fig. 1 に示すような亀裂を有する境界 S をもった板の応力ベクトルは次のようになる。

$$\sigma^a = \sigma^\infty + \sigma^F$$

ただし σ^a は亀裂を有する有限板の境界 S に σ_0^a の外力が作用するときの境界内の真の応力、 σ^∞ は無限板に無限遠点で外力 σ_0 が作用したときの亀裂近傍の応力とする。一方、この無限板から境界 S を切り出したとき境界に作用する応力を σ_0^∞ とし、 $\sigma_0^F = \sigma_0^a - \sigma_0^\infty$ の外力が境界に作用した場合の有限要素法による亀裂近傍の解を σ^F とする。

真の応力 σ^a は次式で表わすことができる⁴⁾。

$$\sigma^a = \left[K_I^\infty / (2\pi r)^{1/2} \cdot F(a/W) \right] \cdot f^a(r, \theta) \quad (2)$$

$$F(a/W) = 1 + K_I^F / K_I^\infty$$

ただし a/W : 亀裂長さと板幅の比

K_I^∞ : 無限板に対する解析解による応力拡大係数

K_I^F : 境界 S をもった有限板に σ_0^F の外力が作用する場合の応力拡大係数

$$f^a(r, \theta) = \cos \theta / 2 \begin{cases} 1 - \sin \theta / 2 \sin 3 \theta / 2 \\ 1 + \sin \theta / 2 \sin 3 \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 \sin 3 \theta / 2 \end{cases}$$

r : 亀裂先端からの距離, θ : 偏角

有限板の応力拡大係数を K_I^a とおけば(2)式より

$$K_I^a = K_I^\infty (1 + K_I^F / K_I^\infty) \quad (3)$$

となる。

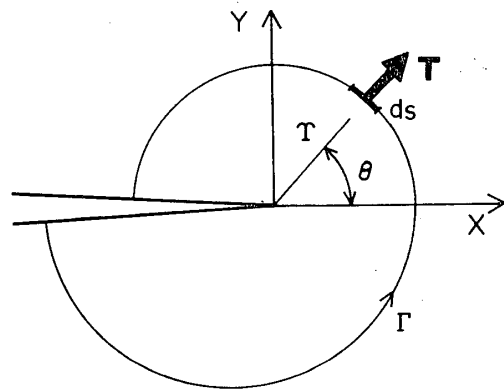


Fig. 2 Crack tip coordinates and typical contour Γ

Rice²¹⁾は Fig. 2 に示すような亀裂先端を含む応力場の任意の曲線 Γ について次式で示す線積分 J を考えた。

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dy - T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (4)$$

ただし w は歪エネルギー密度, T は Γ 上のトラクションベクトル, u は変位ベクトル, s は弧長である。

Rice は J 値が積分路 Γ の取り方に無関係であることを理論的に証明し, エネルギー解放率 \mathcal{G} と等しいことを導いている。すなわち

$$J = \mathcal{G} = (1 - \nu^2) K_I^2 / E \quad (\text{平面歪}) \quad (5)$$

$$J = \mathcal{G} = K_I^2 / E \quad (\text{平面応力}) \quad (6)$$

ただし ν はポアソン比, E は縦弾性係数である。

平面応力状態において, J^∞ および J^F をそれぞれ無限板の解析解および有限要素法による J 値とすれば, 有限板に対する真の値 J^a は(3)式を(6)式に代入して得られる。

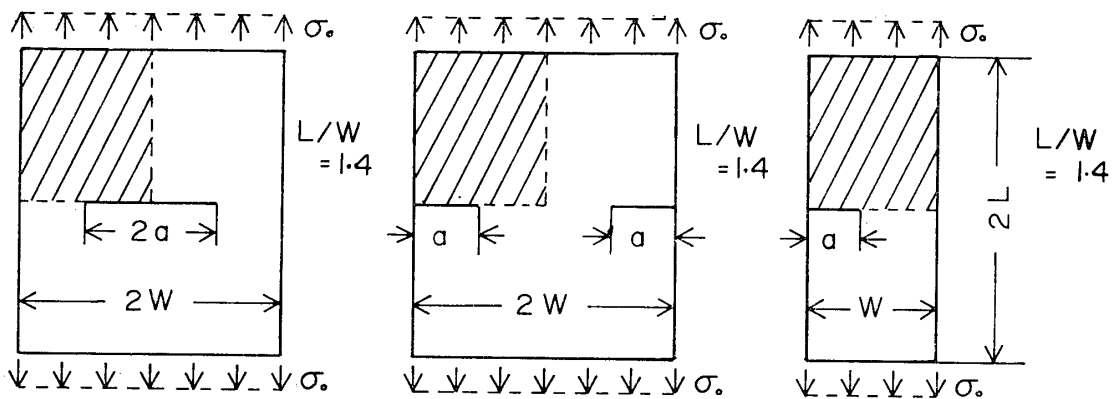
$$J^a = J^\infty \left[1 + (J^F / J^\infty)^{1/2} \right]^2 \quad (7)$$

あるいは修正係数 $F(a/W)$ は(2)式および(6)式より次に示すようになる。

$$F(a/W) = 1 + (J^F / J^\infty)^{1/2} \quad (8)$$

従って解析解より J^∞ , 有限要素法により J^F の値を求めることによって(8)式から有限板の修正係数 $F(a/W)$ を計算することができる。

3. 計算例



(a) CENTRAL CRACK (b) SYMMETRICAL EDGE CRACK (c) SINGLE EDGE CRACK

Fig. 4 Geometry and loading condition of calculated models

一例として, Fig. 4 に示すように亀裂と直角方向に一樣引張 σ_0 を受け, 縦横比 $L/W=1.4$ の矩形板の中央, 両側および片側に亀裂がある三つの場合について, 有限要素法によって得られた結果に直接 J 積分法を用いた場合と重ね合せ法に J 積分法を用いた場合の修正係数 $F(a/W)$ の値を厳密解と比較しその精度の

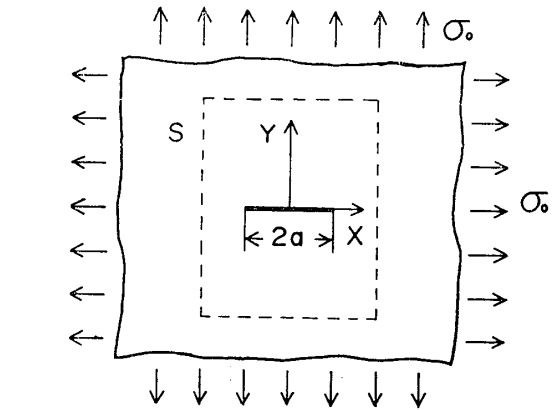


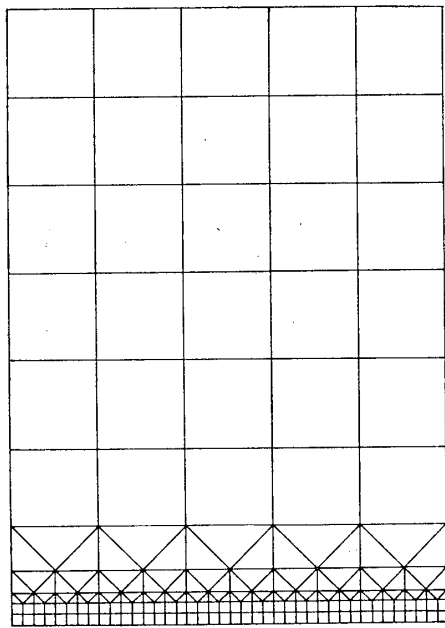
Fig. 3 Infinite plate containing crack and subjected to biaxial uniform tension σ_0 .

(1)式の σ^∞ に対する解析解としてFig. 3 に示すように無限遠方で一樣な2軸引張 σ_0 が作用する平板に長さ $2a$ の亀裂がある場合に対する Westergaard の応力関数²⁴⁾を用いると付録に示すように次の応力および変位の成分が求まる。

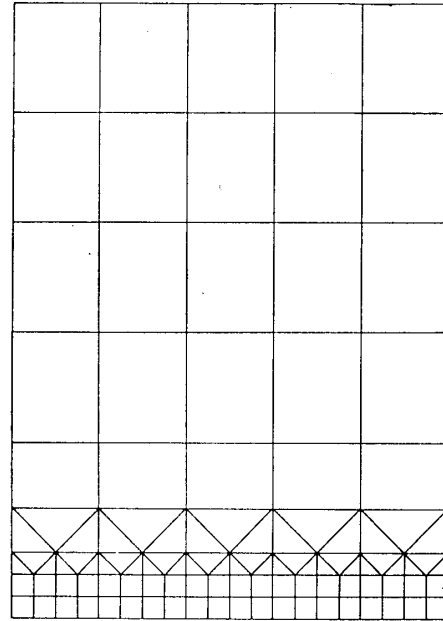
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 R^{-1/2} [x \cos \theta / 2 + y \sin \theta / 2 - y a^2 R^{-1} \sin 3\theta / 2] \\ \sigma_y &= \sigma_0 R^{-1/2} [x \cos \theta / 2 + y \sin \theta / 2 + y a^2 R^{-1} \sin 3\theta / 2] \\ \tau_{xy} &= -\sigma_0 y a^2 R^{-3/2} \cos 3\theta / 2 \\ u &= \sigma_0 R^{-1/2} [\{ (1 - \nu) R - y^2 (1 + \nu) \} \cos \theta / 2 \\ &\quad + (1 + \nu) x y \sin \theta / 2] / E \\ v &= \sigma_0 R^{-1/2} [- (1 + \nu) x y \cos \theta / 2 \\ &\quad + \{ 2R - (1 + \nu) y^2 \} \sin \theta / 2] / E \end{aligned} \quad (9)$$

検討を試みた。

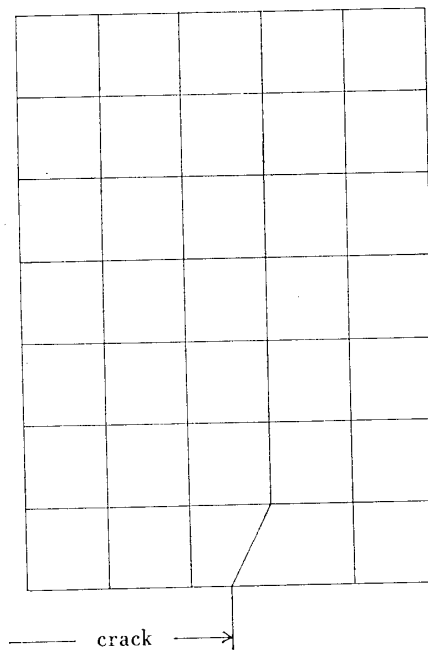
有限要素法による解析は図形の対称性から中心亀裂と両側亀裂については全体の1/4, 片側亀裂については全体の1/2を取り出し要素数215, 110および35の3通りについて, a/W の値が0.1から0.6まで0.1きざみで行なった。ただし要素数35については最小要素の中



No. of mesh 215



No. of mesh 110



No. of mesh 35

Fig. 5 Mesh patterns for one quarter or half of plate

が a/W で0.2となるので、 a/W が0.1, 0.3および0.5のとき図のように斜めの要素を用いて計算を行なった。その要素分割例を Fig. 5 に示す。

Fig. 6 に示すように J 積分の積分路 Γ を選ぶと(4)式は次に示すようになる。

$$J = 2 \int_0^{L_2} \left(-\overset{\textcircled{1}}{\sigma_x} \overset{\textcircled{1}}{\epsilon_x} - \overset{\textcircled{1}}{\tau_{xy}} \frac{\partial v^{\textcircled{1}}}{\partial x} \right) ds + 2 \int_0^{L_1} \left(\overset{\textcircled{2}}{\tau_{xy}} \overset{\textcircled{2}}{\epsilon_x} + \overset{\textcircled{2}}{\sigma_y} \frac{\partial v^{\textcircled{2}}}{\partial x} \right) ds$$

$$+ 2 \int_0^{L_2} \left(\overset{\textcircled{1}}{\sigma_x} \overset{\textcircled{1}}{\epsilon_x} + \overset{\textcircled{1}}{\tau_{xy}} \frac{\partial v^{\textcircled{1}}}{\partial x} \right) ds \tag{10}$$

Fig. 7 に $a/W=0.4$, 中心亀裂の場合の厳密解に対する誤差と α (積分路の長さと各要素分割の要素の最小辺の長さとの比) の関係を示す。

有限要素法の結果に直接 J 積分法を用いた場合、要素数215および110では、 α が小さい値すなわち $\alpha=12$ でいずれも誤差約6.5%となり、 α が30以上になると

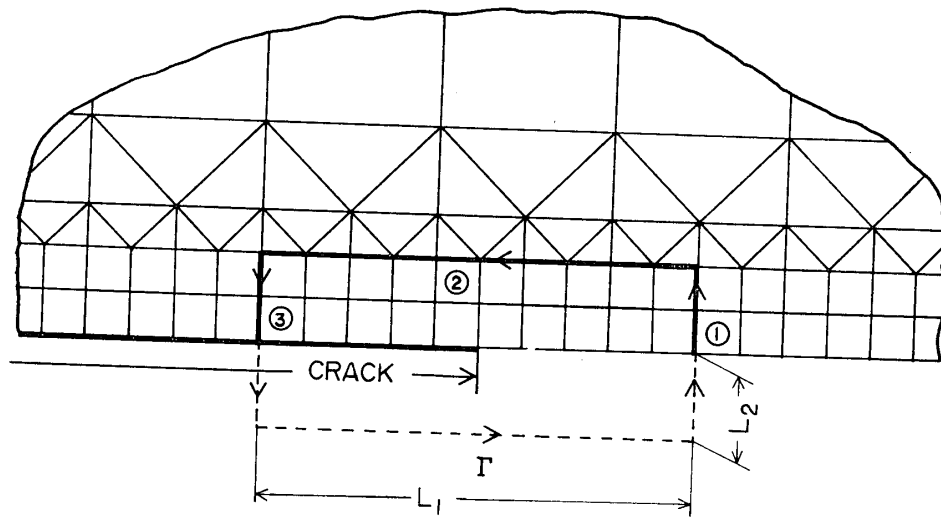


Fig. 6 An example of the integral path Γ .

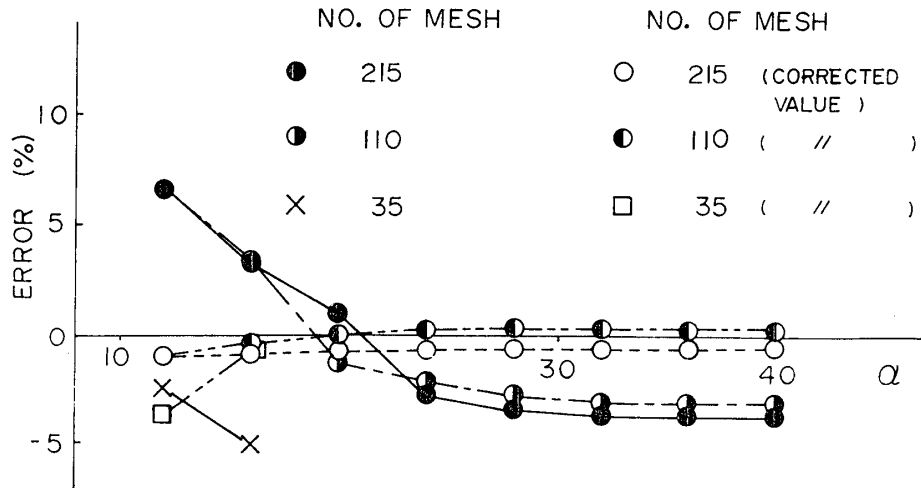


Fig. 7 Relation between error and α . α is the ratio of the length of integral path to minimum length of mesh

要素数215では誤差約3.7%, 要素数110では3.0%に収斂した。これに対し重ね合せ法にJ積分法を用いた場合, α が小さい所でも誤差は小さく, α を大きくすると要素数215, 110共に誤差約0.7%に収斂した。要素数35については $\alpha=16$ で約0.8%の誤差があった。

縦軸に $F(a/W)$ を横軸に a/W をとり, 中心亀裂, 両側亀裂および片側亀裂の各場合について厳密解との比較を Fig. 8, Fig. 9および Fig.10 に示す。それぞれに対する厳密解は石田¹¹⁾, Irwin¹⁾ および Gross¹²⁾の解を用いた。

中心亀裂ではFig. 8に示すように有限要素法の結果に直接J積分法を用いた場合 a/W が0.2以下では誤差が大きく, 特に要素数35が著しい。しかし亀裂長さが大きくなるとすなわち a/W が0.3以上で, 誤差は約3.7

%以内となった。一方, 重ね合せ法にJ積分法を用いた場合, いずれの要素分割も誤差約1%以内となり, 極端に要素数を少なくしても誤差には影響がない。

両側亀裂の場合Fig. 9に示すように重ね合せ法にJ積分法を用いると中心亀裂と同様に要素数にほとんど関係しない。

片側亀裂の場合 Fig. 10から明らかなように a/W が0.5以下では誤差は少ないが, $a/W=0.6$ では重ね合せ法にJ積分法を用いてもあまり良い結果は得られず, 特に要素数35の場合誤差が大きい。

本方法と有限要素法を用いた他の方法, すなわち直接法およびエネルギー法との精度を要素数215の場合について比較した結果を中心亀裂, 両側亀裂および片側亀裂について Table 1, Table 2 および Table 3

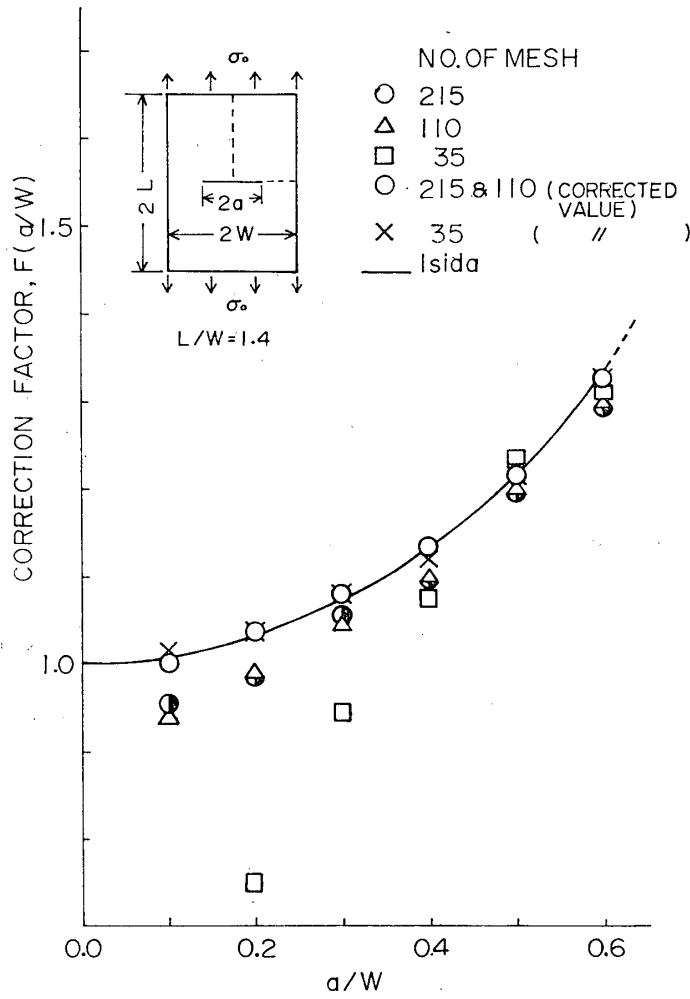


Fig. 8 Correction factor $F(a/W)$ for a central crack

Table 1 Values of $F(a/W)$ for the central crack

a/W	Finite element method				Analytic value
	Stress method	Displacement method	Energy method	Present method	Isida
0.1	1.206	0.907	0.954	1.000	1.008
0.2	1.252	0.923	0.996	1.033	1.032
0.3	1.293	0.987	1.048	1.071	1.072
0.4	1.367	1.018	1.108	1.133	1.131
0.5	1.474	1.120	1.196	1.211	1.215
0.6	1.618	1.188	1.315	1.332	1.334

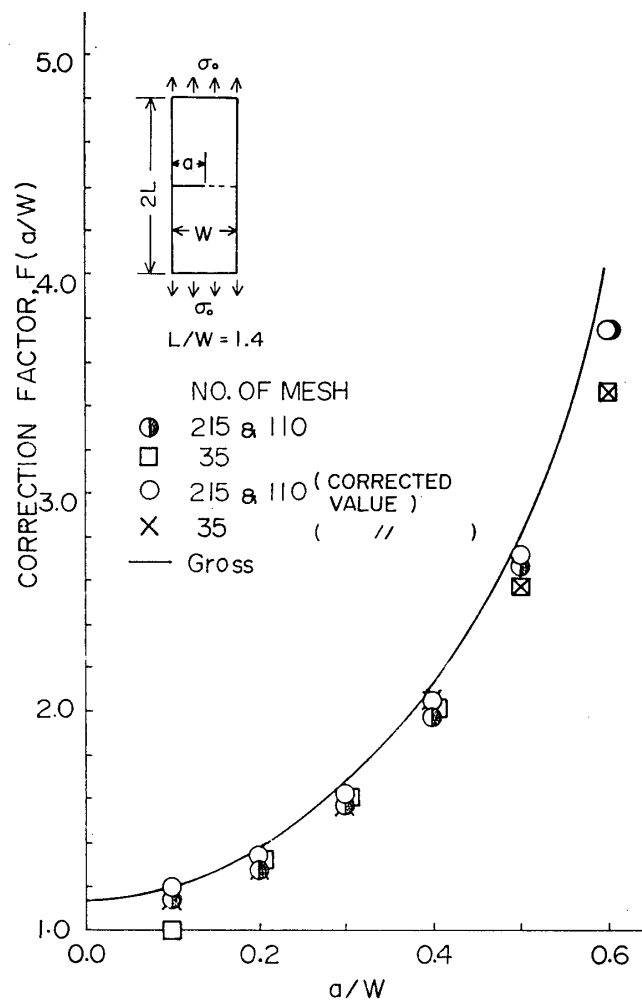


Fig. 9 Correction factor $F(a/W)$ for a single edge crack

Table 2 Values of $F(a/W)$ for the symmetrical edge cracks

a/W	Finite element method				Analytic value
	Stress method	Displacement method	Energy method	Present method	Irwin*
0.1	1.286	0.962	1.057	1.086	1.098
0.2	1.309	0.987	1.085	1.115	1.105
0.3	1.357	1.032	1.111	1.136	1.119
0.4	1.391	1.033	1.136	1.166	1.144
0.5	1.447	1.086	1.180	1.198	1.183
0.6	1.511	1.126	1.243	1.254	1.250

* 有限巾無限長の場合の解析解

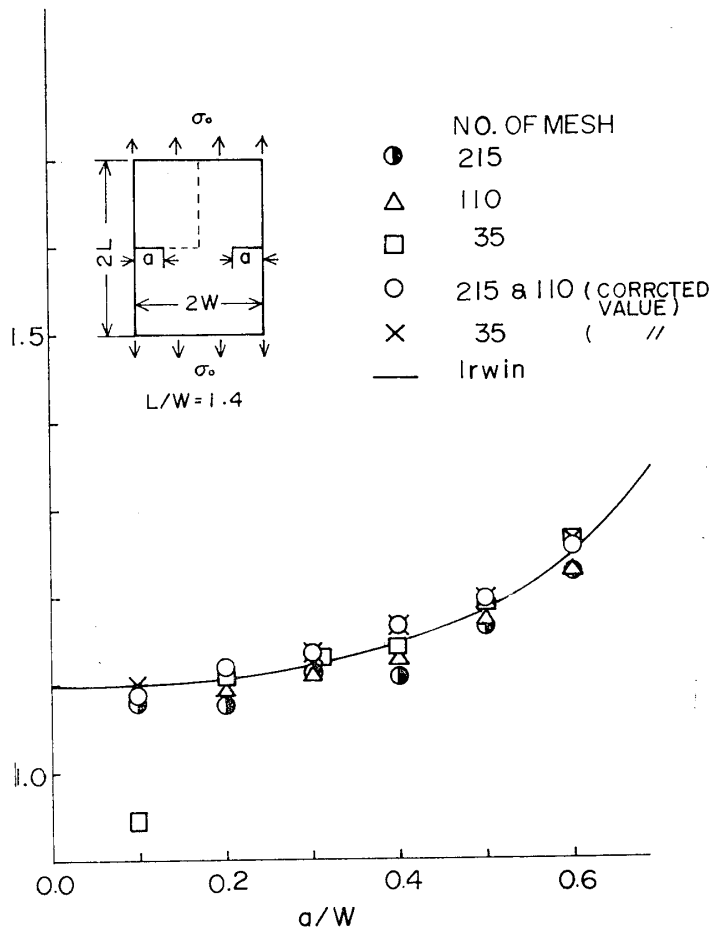


Fig. 10 Correction factor $F(a/W)$ for symmetrical edge cracks

Table 3 Values of $F(a/W)$ for the single side crack

a/W	Finite element method				Analytic vaue
	Stress method	Displacement method	Energy method	Present method	Gross
0.1	1.364	0.967	1.162	1.204	1.186
0.2	1.609	1.177	1.351	1.320	1.373
0.3	1.986	1.486	1.652	1.623	1.663
0.4	2.518	1.838	2.098	2.036	2.107
0.5	3.490	2.551	2.772	2.709	2.830
0.6	4.900	3.461	4.101	3.750	4.030

にそれぞれ示す。表より明らかなように中心亀裂、両側亀裂では本方法と比べると他の方法は精度は悪い。

4. 結 言

以上の計算例から次のことが明らかになった。

(1) 有限要素法の結果に直接J積分法を用いた場合、要素数215, 110の誤差はほとんど同じであるが、要素数35の場合のように極端に分割数を少なくすると a/W が小さい値で誤差は大きい。

(2) 重ね合せ法にJ積分法を用いた場合、要素数35のように極端に分割数を少なくしても、中心亀裂ではほぼ厳密解に一致し、両側亀裂ではいずれの要素分割もほとんど差異はない。また片側亀裂においても、 a/W が0.5以下では精度は良いが、 $a/W=0.6$ では分割数が少ないと精度が悪く、分割数をふやしても誤差は約5%である。これは山本等¹⁶⁾も指摘しているようにGrossの解が選点法を用い亀裂の浅い所しか解の精度を保証していないことも一つの原因と思われる。

(3) 重ね合せ法にJ積分法を用いる本方法は中心亀裂、両側亀裂の場合、直接法とエネルギー法に比較して精度は良い。しかし片側亀裂の場合必ずしも精度が良いとは言えない。

(4) J積分法を行なう場合、積分路の長さと要素の最小辺の長さとの比 α が大きい程、誤差は小さく、 α が30以上では誤差は一定値に収斂する傾向がある。

参 考 文 献

- 1) G.P. Irwin: J. Appl. Mech., 24, 361 (1957)
- 2) G.C. Sih et al.: J. Appl. Mech., 29, 306 (1962)
- 3) P.C. Paris et al.: ASTM, 381, 30 (1964)
- 4) M.L. Williams: J. Appl. Mech., 24, 109 (1957)
- 5) W.L. Server et al.: J.E. Fracture Mech., 4, 367 (1972)
- 6) O.L. Bowie: J. Appl. Mech., 31, 208 (1964)
- 7) R.W. Thresher: J. Appl. Mech., 39, 195 (1972)
- 8) A.S. Kobayashi et al.: Trans. ASME, Ser. D, 86, 681 (1964)
- 9) W.K. Wilson: Trans. ASME, Ser. D, 93, 685 (1971)
- 10) J.R. Rice et al.: J. Appl. Mech., 39, 185 (1972)
- 11) M. Isida: Int. J. Fracture Mech., 7, 301 (1971)
- 12) B. Gross et al.: NASA TND-2369 (1964)
- 13) G.P. Anderson et al.: Int. J. Fracture Mech., 7, 63 (1971)
- 14) J.R. Dixon et al.: J. Strain Analysis, 7, 125 (1972)
- 15) W.K. Wilson: Ph D. Dissertation, Univ. Pittsburgh (1969)
- 16) 山本, 徳田: 造船学会論文集, 130, 219 (1971)
- 17) 徳田, 山本: 造船学会論文集, 132, 85 (1972)

- 18) 山本, 角: 造船学会論文集, 133, 179 (1973)
- 19) 山本, 谷口: 機械学会論文集, 38-306, 269 (1972)
- 20) Y. Yamamoto et al.: Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Y. Yamada and R.H. Gallagher, Eds. Univ. of Tokyo Press, 75 (1973)
- 21) J.R. Rice: J. Appl. Mech., 35, 379 (1969)
- 22) N. Levy et al.: Int. J. Fracture Mech, 7, 143 (1971)
- 23) R.K. Leverenz: Int. J. Fracture Mech., 8, 311 (1972)
- 24) H.M. Westergaard: J. Appl. Mech., 6, A 49 (1939)

(昭和48年12月15日受理)

付 録

Westergaard²⁴⁾は二次元応力および変位の成分を複素関数を用いて次のように表わしている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= Re\psi - y Im\psi' \\ \sigma_y &= Re\psi + y Im\psi' \\ \tau_{xy} &= -y Re\psi' \\ u &= [(1-\nu)Re\psi - y(1+\nu)Im\psi]/E \\ v &= [2Im\psi - y(1+\nu)Re\psi]/E \end{aligned} \right\} (A-1)$$

ただし

$$\psi: \text{複素ポテンシャル}, \psi' = d\psi/dz, \psi = d\psi/dz$$

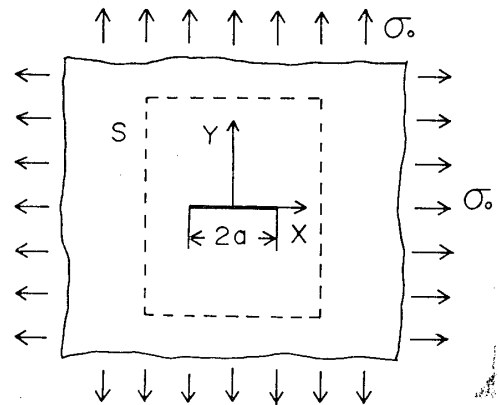


Fig. 11 Infinite plate containing crack and subjected to biaxial uniform tension

さらに Westergaard²⁴⁾は Fig.11 に示すように無限遠点に一樣な二軸引張 σ_0 が作用する板に長さ $2a$ の亀裂がある場合に対する複素応力関数 ψ を次のようにおいている。

$$\psi = \sigma_0 z / (z^2 - a^2)^{1/2} \quad (A-2)$$

ただし $z = x + iy$

(A-2)式で示される応力関数を用いて,(A-1)式によって各成分を求めるために次のように置換する。

$$z^2 - a^2 = X + iY = Re^{i\theta} \quad (A-3)$$

$$\text{ただし } X = x^2 - y^2 - a^2, Y = 2xy$$

$$R = (X^2 + Y^2)^{1/2}, \theta = \tan^{-1}(Y/X)$$

しかるとき、応力関数 ψ は

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma_0(x + iy)R^{-1/2}e^{-i\theta/2} \\ &= \sigma_0R^{-1/2}\{x\cos\theta/2 + y\sin\theta/2\} \\ &\quad + i\{y\cos\theta/2 - x\sin\theta/2\} \end{aligned}$$

となり、この実部および虚部は次のようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} Re\psi &= \sigma_0R^{-1/2}(x\cos\theta/2 + y\sin\theta/2) \\ Im\psi &= \sigma_0R^{-1/2}(y\cos\theta/2 - x\sin\theta/2) \end{aligned} \right\} (A-4)$$

(A-2) 式を z で微分および積分し、(A-3) 式を代入すると次式に示すようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi' &= -\sigma_0a^2R^{-3/2}(\cos 3\theta/2 - i\sin 3\theta/2) \\ \Psi &= \sigma_0R^{1/2}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2) \end{aligned} \right\} (A-5)$$

これらの式の実部および虚部は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Re\psi' &= -\sigma_0a^2R^{-3/2}\cos 3\theta/2 \\ Im\psi' &= \sigma_0a^2R^{-3/2}\sin 3\theta/2 \\ Re\Psi &= \sigma_0R^{1/2}\cos\theta/2 \\ Im\Psi &= \sigma_0R^{1/2}\sin\theta/2 \end{aligned} \right\} (A-6)$$

したがって (A-1) 式に (A-4), (A-6) 式を代入すると応力および変位は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0R^{-1/2} [x\cos\theta/2 + y\sin\theta/2 \\ &\quad - ya^2R^{-1}\sin 3\theta/2] \\ \sigma_y &= \sigma_0R^{-1/2} [x\cos\theta/2 + y\sin\theta/2 \\ &\quad + ya^2R^{-1}\sin 3\theta/2] \\ \tau_{xy} &= -\sigma_0ya^2R^{-3/2}\cos 3\theta/2 \\ u &= \sigma_0R^{-1/2} [\{(1-\nu)R - y^2(1+\nu)\}\cos\theta/2 \\ &\quad + (1+\nu)xy\sin\theta/2]/E \\ v &= \sigma_0R^{-1/2} [-(1+\nu)xy\cos\theta/2 \\ &\quad + \{2R - (1+\nu)y^2\}\sin\theta/2]/E \end{aligned} \right\} (A-7)$$

(A-7) 式より亀裂を含む任意の境界 S 上の応力および変位の成分を求めることができる。