

# コンクリートの圧縮疲労試験における 力学的諸性質についての考察（第2報）

加 賀 美 一 二 三\*

## 要 旨

本研究における第1報において、応力-ひずみ曲線中の力学的変化点付近において繰返し負荷後静的破壊実験を実施して、動的負荷に対する実験結果に関する考察をなしたのであるが、著者はさらに所期の荷重段階における動的応力-ひずみ関係を求めるため実験を試みた。すなわち、本実験に当り応力振幅の下限荷重を1tとし、各荷重段階の上限荷重を漸次上昇せしめて各回ごとに繰返し回数を多くした場合と、応力振幅を1t $\sim$ 0.45 $P_u$ 、1t $\sim$ 0.55 $P_u$ 、1t $\sim$ 0.70 $P_u$ のように順次増大させた場合における応力-ひずみ、応力-弾性係数の関係を求めて静的繰返し荷重の場合と比較考察したもので、その結果は第1報の場合の疲労に関する要素がこの実験からも立証できたものであり、コンクリートの疲労に関する機構が第1報とともに定性的に明らかとなった。さらに、これが定量的解析としてこの場合の動力学的理論考察を試みたものである。

## 1. 緒 言

疲労試験におけるコンクリート供試体には共和無線のK-8のゲージを供試体中央対称位置に貼付して、このゲージを信興通信のDS6-D型動ひずみ測定器に連結し、この測定値をEO-6型のペン書きオシログラフに記録して供試体の動ひずみを求め、他に供試体にダイヤルゲージ装着による静的単一繰返し実験をなし、両者を比較検討したものである。その結果応力周期の大なるものは同一振幅、同一繰返し数においても大きいひずみを示し、応力-ひずみ関係は小応力振幅（弾性限内）の場合は静的単一圧縮応力-ひずみ曲線にはほぼ一致し、応力振幅大（弾性限以上の領域）となるに従い、その応力-ひずみ曲線は右に移動しその傾きが大きくなり、また弾性係数は静弾性係数より一般に小値を示すがその傾向は類似のものであることを述べ、圧縮繰返し負荷の場合における動力学的関係を解析的に誘導して数値計算して考察したところ、割合に実験値と一致するものであることを述べたものである。

## 2. 実験供試体と測定方法

### 2.1 実験供試体

本研究の第1報と全く同一である。

### 2.2 測定方法

測定方法は各荷重段階におけるひずみ値を測定しなければならぬので、緒言にて述べたように電気抵抗線ひずみゲージによりペン書きオシログラフに記録せしめ動ひずみを求めた。疲労試験機はアムスラー型30t容量のパルセイターを使用した。

## 3. 測定結果

### 3.1 各荷重段階の上限荷重を漸次上昇させる場合

(1) 3種のコンクリートに対する圧縮応力-ひずみの関係

この測定結果は図1, 2, 3である。

(2) 3種のコンクリートに対する圧縮応力-弾性係数の関係

この関係を示すと図4, 5, 6である。

### 3.2 応力振幅を1t $\sim$ 0.45 $P_u$ 、0.55 $P_u$ 、0.70 $P_u$ のように順次増大をせる場合

(1)  $\sigma_{cy}$  90, 155kg/cm<sup>2</sup>程度のコンクリートに対する圧縮応力-ひずみの関係

この測定結果は図7, 8のごとくである。

(2)  $\sigma_{cy}$  90, 155kg/cm<sup>2</sup>程度のコンクリートに対する圧縮応力-弾性係数の関係

この関係を示すと図9, 10のごとくである。

\* 土木工学教室

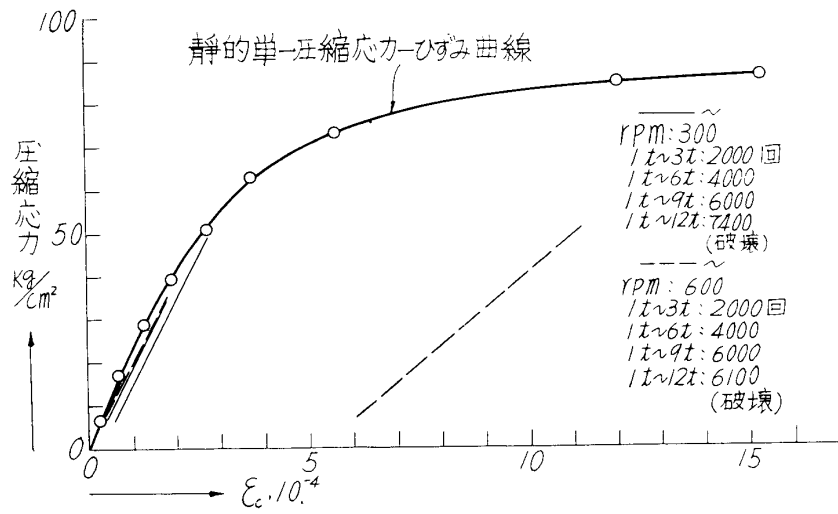


図1  $\sigma_{cy}$  90kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - \epsilon_c$  の関係

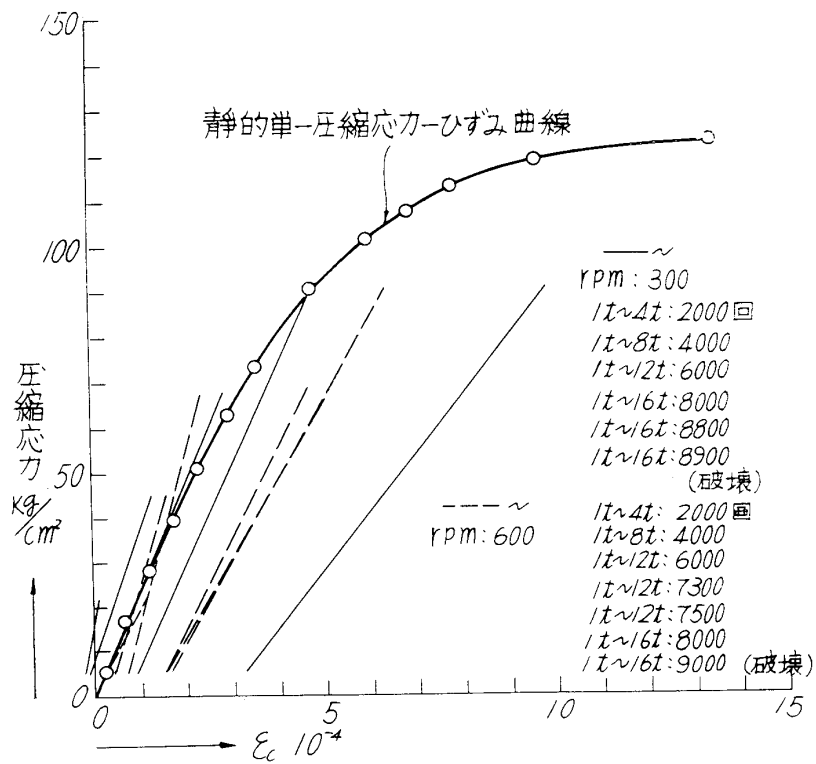


図2  $\sigma_{cy}$  125kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - \epsilon_c$  の関係

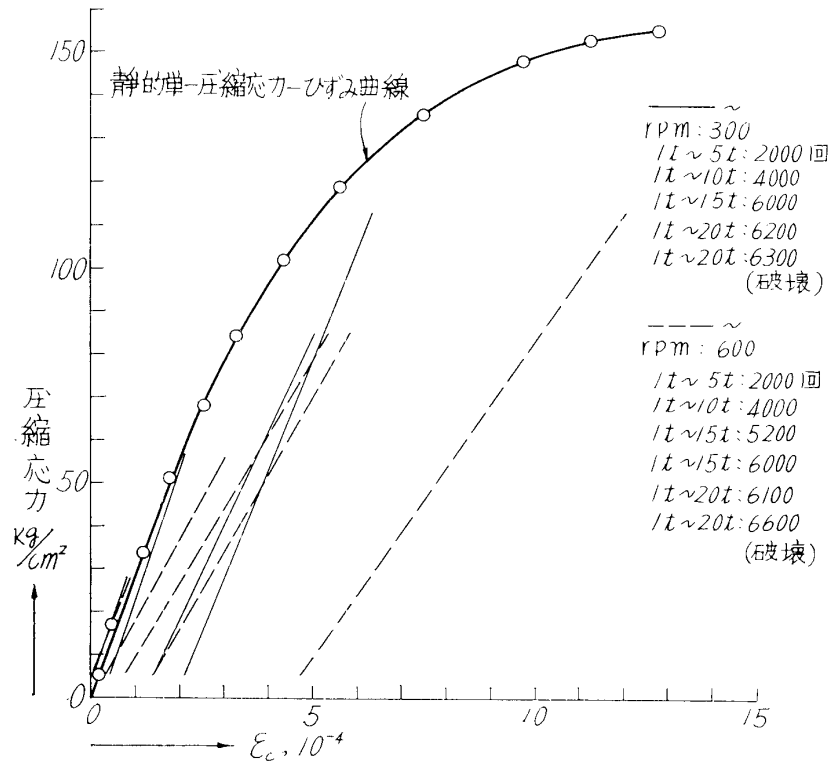


図3  $\sigma_{cy}$  155kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - \epsilon_c$  の関係

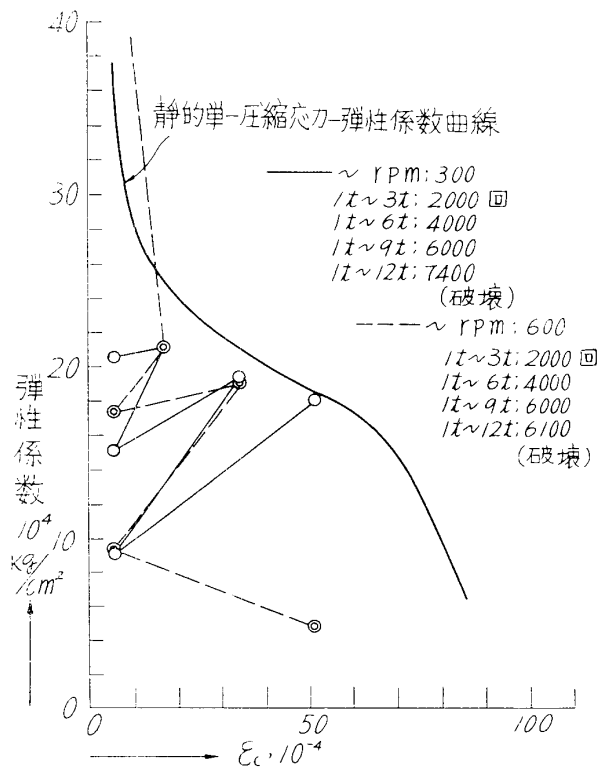


図4  $\sigma_{cy}$  90kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - E_c$  の関係

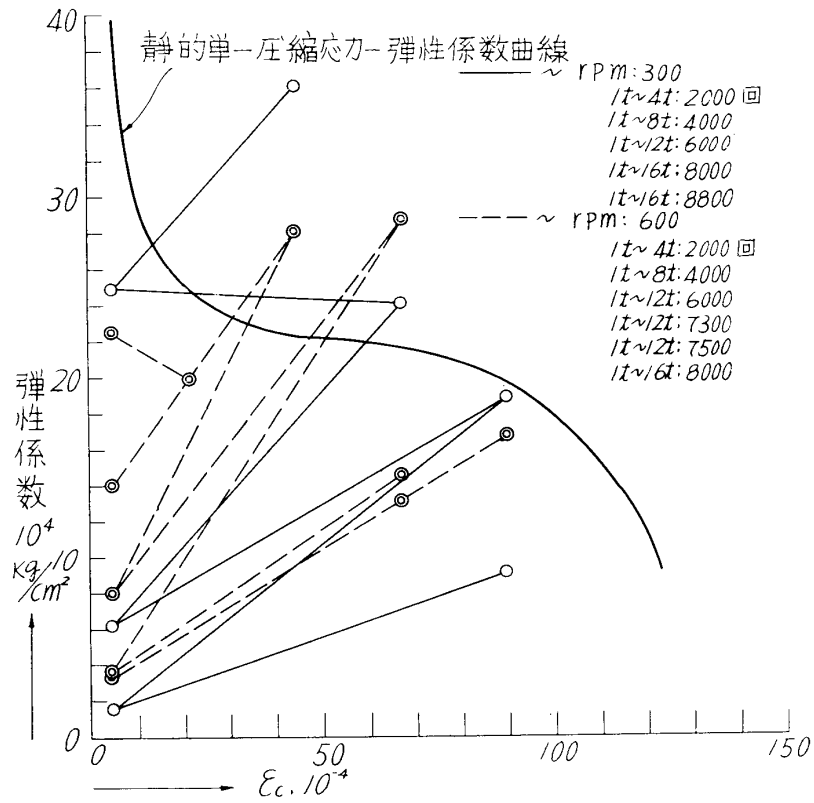


図5  $\sigma_{cy}$  125kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - E_c$  の関係

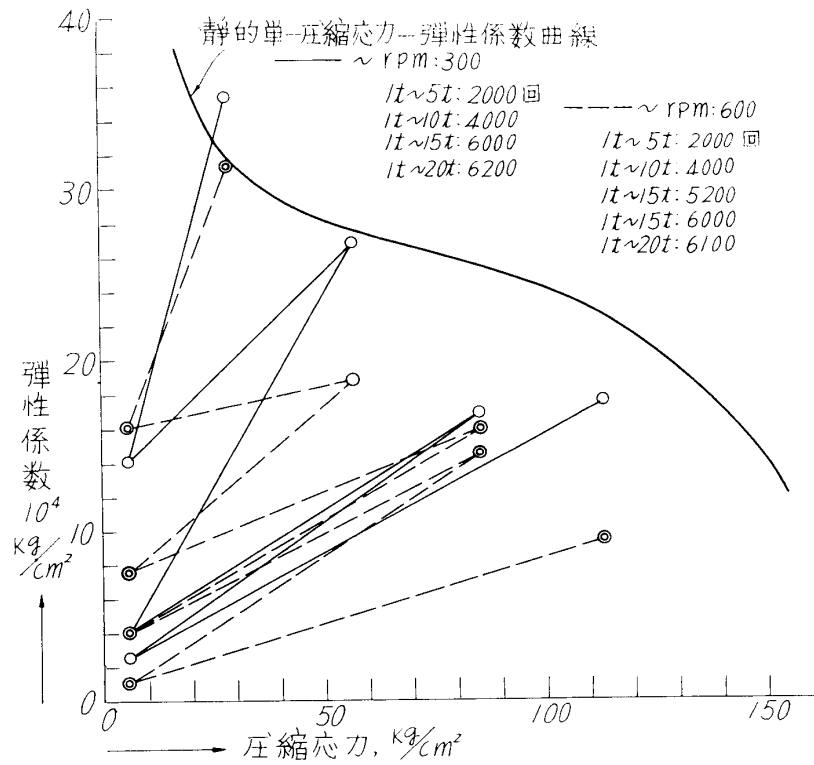


図6  $\sigma_{cy}$  155kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - E_c$  の関係

3.3 応力繰返し回数と圧縮ひずみの関係

300 rpm の場合、2種のコンクリートに対する応力振幅の下限、上限の場合の応力繰返し回数と圧縮ひずみの関係は図11となる。

4. 実験結果に関する考察

各荷重段階の上限荷重を小荷重より漸次上昇させた場合；～応力周期 300 rpm の場合より 600 rpm の場合

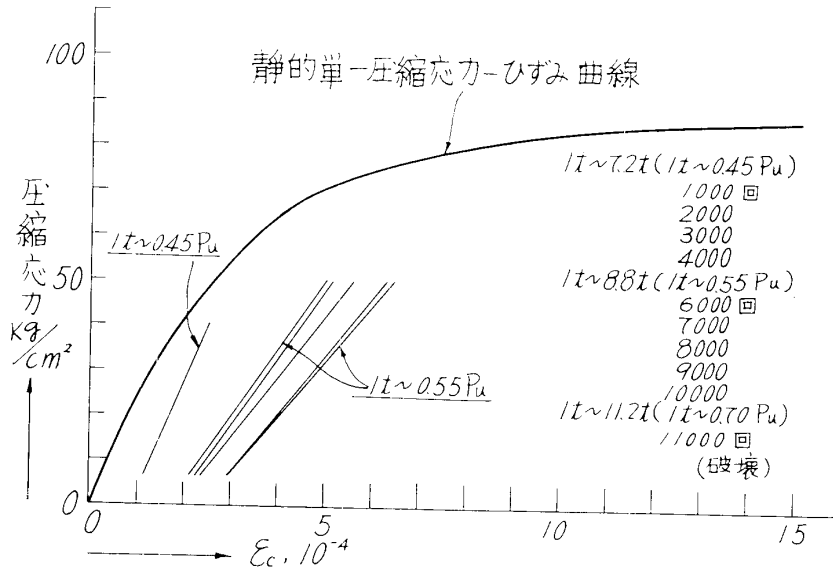


図7  $\sigma_{cy}$  90kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - \epsilon_c$  の関係

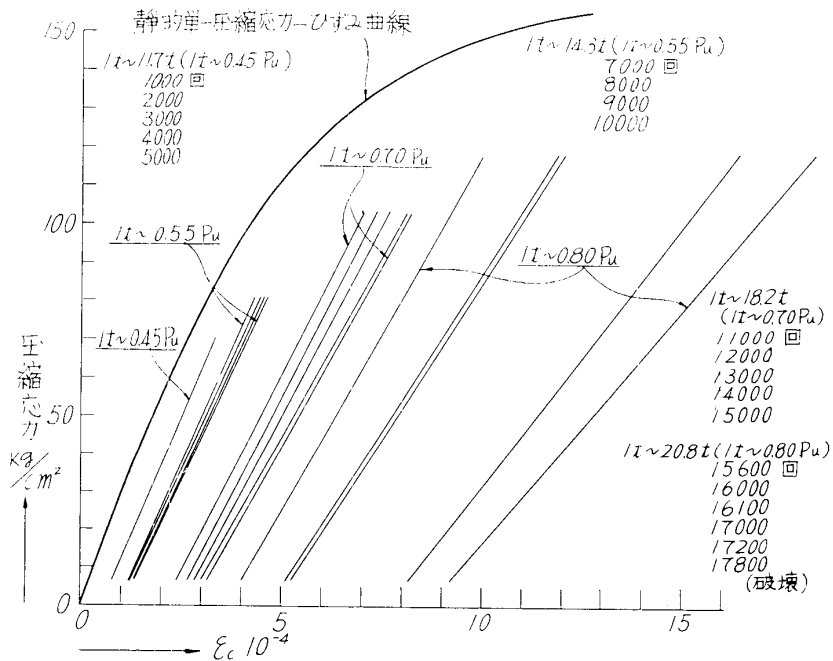


図8  $\sigma_{cy}$  155kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - \epsilon_c$  の関係

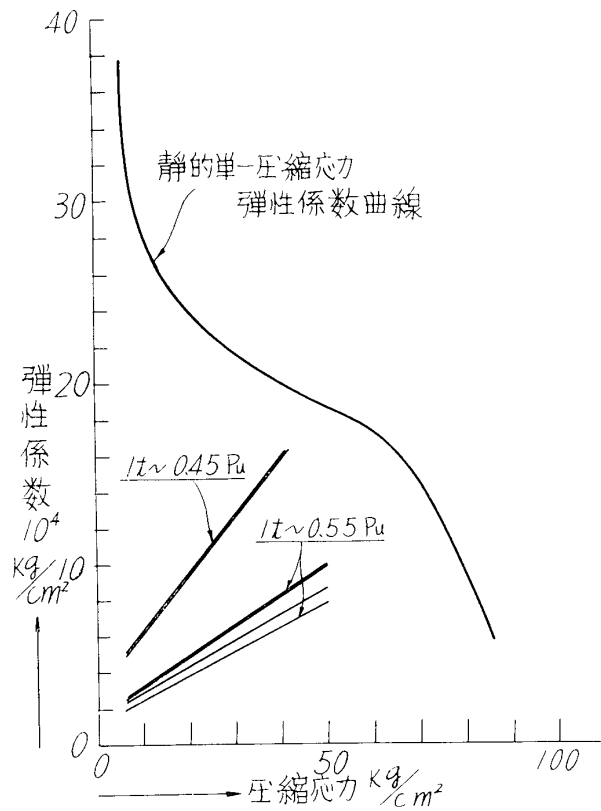


図9  $\sigma_{cy}$  90kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - E_c$  の関係

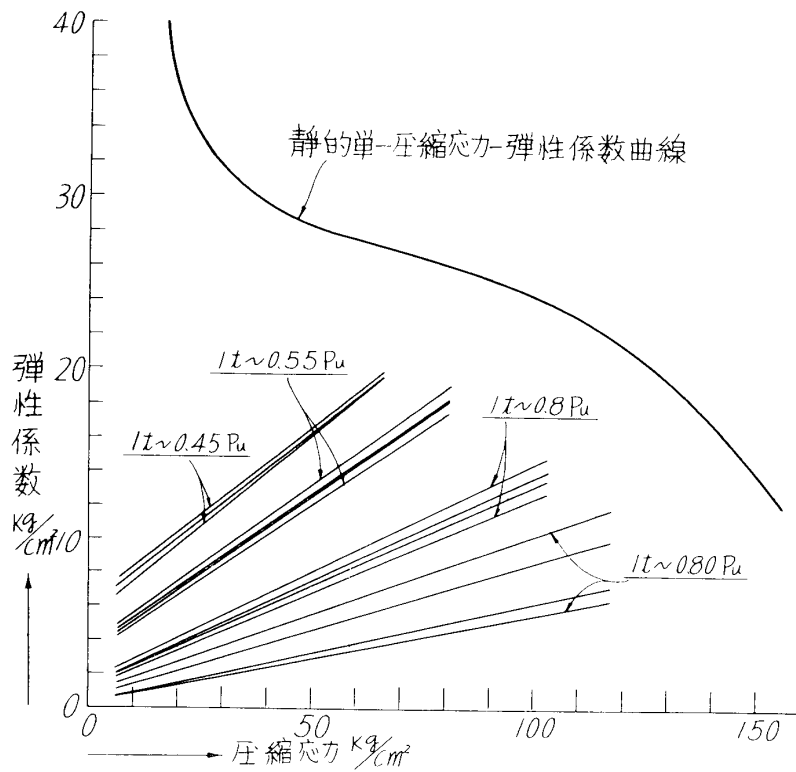


図10  $\sigma_{cy}$  155kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の  $\sigma_c - E_c$  の関係

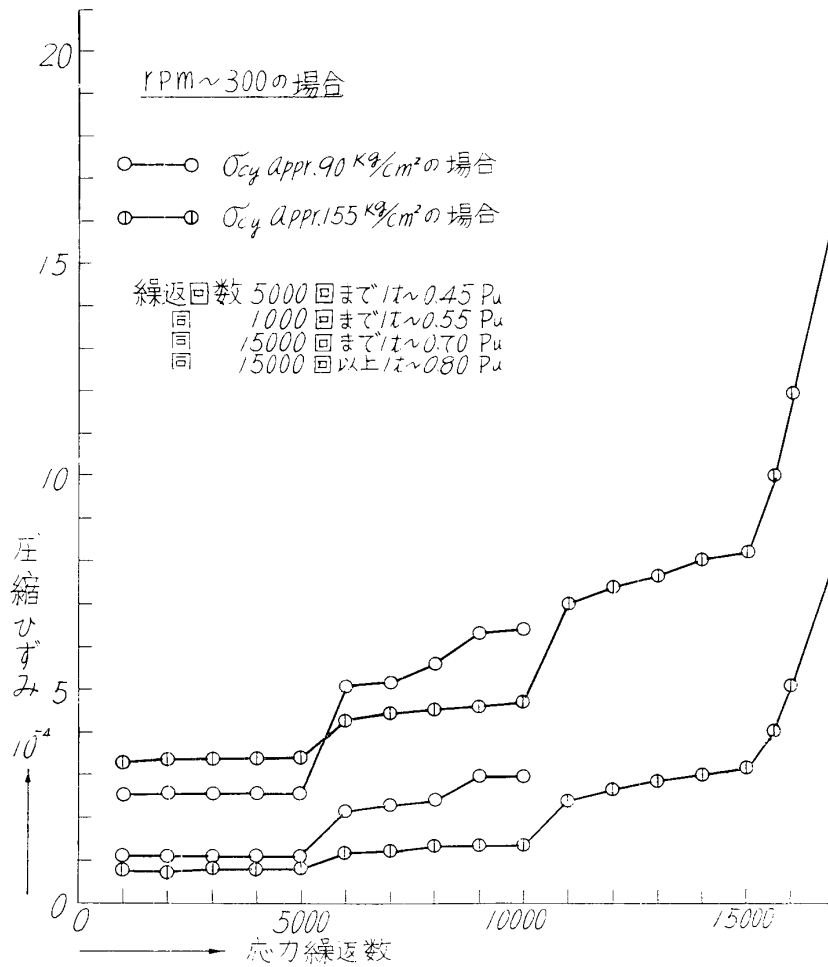


図11 300 rpm の場合の応力繰返回数と圧縮ひずみの関係

が大きいひずみを示す。応力-ひずみ関係は弾性限以内の小応力振幅の場合には、静的単一圧縮応力-ひずみ曲線にほぼ一致するが、弾性限以上の応力振幅大となる領域においては漸次右に移動しその傾きは大きくなる。弾性係数は 300, 600 rpm の両場合とも残留ひずみのため、概して静的単一圧縮弾性係数より次第に小値となる傾向である。

応力振幅を  $1t \sim 0.45P_u$ ,  $0.55P_u$ ,  $0.70P_u$  などのように順次増大させた場合； $\sim 1t \sim 0.45P_u$  の場合は静的単一圧縮応力-ひずみ曲線にほぼ平行にて、その位置はほとんど変わらないが、応力振幅を逐次上昇させた場合である  $1t \sim 0.55P_u$  程度にては、余り変化はないが緩かに漸増し、 $1t \sim 0.70P_u$  以上になると右に移動し、その移動量ならびに傾きが大きくなる。弾性係数も同一応力振幅にてはその移動量も少ないが、応力振幅が大となると弾性係数は小値となりその減少量が大きくなる。

応力繰返し回数と圧縮ひずみの関係； $\sim 300 \text{ rpm}$  の実験例を示したのが図11であり、 $\sigma_{cy} 90, 155 \text{ kg/cm}^2$  程度のコンクリートについての結果はほとんど同傾向であり、 $1t \sim 0.45P_u$  の範囲であると応力振幅における上限、下限荷重によるひずみは全く一定値で増加の傾向は認められない。しかしながら、 $1t \sim 0.55P_u$  の応力振幅内にては両者のひずみもきわめてわずかの漸増傾向にあり、 $1t \sim 0.70P_u$ ,  $1t \sim 0.80P_u$  になると、きわめて著しいひずみ増加があらわれ、ついに破壊するにいたるものである。

### 5. 圧縮繰返し荷重の場合の変位

(1) 一般運動方程式による繰返し実験中の変位量ある時刻  $t$  における図12の  $x$  なる部分の変位を  $u$  とすると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{Strain}, \quad E \frac{\partial u}{\partial x} = \text{Stress}$$

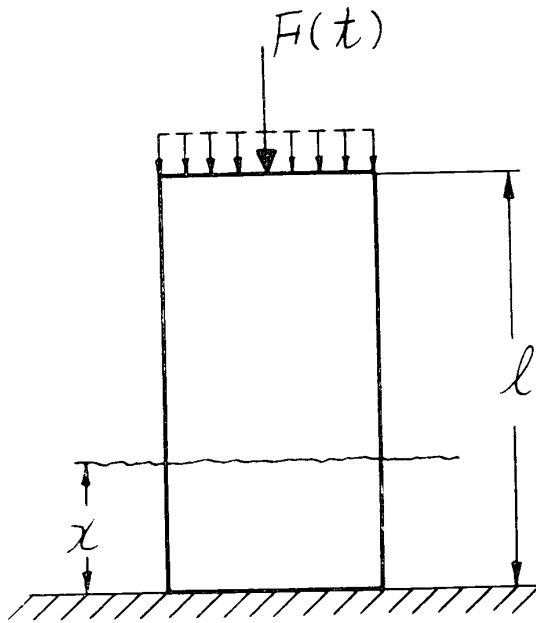


図12 供試体に対する荷重関係

$\delta x$  なる部分の運動方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (a)$$

供試体が均質な断面を持つものとするれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (b)$$

式中、 $\frac{E}{\rho} = \frac{1}{\lambda}$ ,  $E$  = 弾性係数,  $\rho$  = 密度

一般に,

$$u = F(t) f(x) \quad (c)$$

$$f(x) = A \sin \omega \sqrt{\lambda} x + B \cos \omega \sqrt{\lambda} x$$

$$F(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

$$t = 0, F(t) = 0 \quad \therefore D = 0$$

$$u = (A' \sin \omega \sqrt{\lambda} x + B' \cos \omega \sqrt{\lambda} x) \sin \omega t \quad (d)$$

ここに,  $A' = AC$ ,  $B' = BC$

境界条件として

$$x = 0, u = 0 \quad \therefore B' = 0$$

$$u = A' \sin \omega \sqrt{\lambda} x \sin \omega t \quad (e)$$

$$\frac{du}{dx} = A' \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} x \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -A' \omega^2 \sin \omega \sqrt{\lambda} x \sin \omega t$$

一般に,  $F_0(t) = EA \frac{du}{dx}$

$x = l$  とすると

$$EA A' \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} l \sin \omega t = F_0(t)$$

$$A' = \frac{F_0(t)}{EA \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} l \sin \omega t} \quad (f)$$

$$\therefore u = \frac{F_0(t)}{EA \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} l} \sin \omega \sqrt{\lambda} x \quad (1)$$

いま, 繰返し負荷の場合下限荷重  $P_1$ , 上限荷重  $P_2$ , 平均荷重  $P_0$  とすると

$$F_0(t) = P_0 + \frac{P_2 - P_1}{2} \sin \omega t$$

$$\therefore u = \frac{P_0}{EA \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} l} \sin \omega \sqrt{\lambda} x$$

$$+ \frac{P_2 - P_1}{2EA \omega \sqrt{\lambda} \cos \omega \sqrt{\lambda} l} \sin \omega \sqrt{\lambda} x \sin \omega t \quad (2)$$

いま, 300 rpm の場合, 2種のコンクリートの繰返し実験について(2)式により計算した結果は表1となる。

表 1

$\sigma_{28}$ kg/cm <sup>2</sup>	コンクリートの密度 $\rho$ kg/cm <sup>3</sup>	応 振 幅 $t$	弾 性 限 数 $E$ kg/cm <sup>2</sup>	(2)式による ひ ず み	実測による ひ ず み
90	2.31	1.0~ 7.2 (0.45 $P_u$ )	0.492. 10 <sup>5</sup> 1. 58. 10 <sup>5</sup>	2.33. 10 <sup>-4</sup>	2.58. 10 <sup>-4</sup>
		1.0~ 8.8 (0.55 $P_u$ )	0.263. 10 <sup>5</sup> 0.991. 10 <sup>5</sup>	15. 0. 10 <sup>-4</sup>	5.03. 10 <sup>-4</sup>
155	2.34	1.0~ 11.7 (0.45 $P_u$ )	0.755. 10 <sup>5</sup> 1. 98. 10 <sup>5</sup>	3.15. 10 <sup>-4</sup>	3.35. 10 <sup>-4</sup>
		1.0~ 14.3 (0.55 $P_u$ )	0.472. 10 <sup>5</sup> 1. 88. 10 <sup>5</sup>	3.94. 10 <sup>-4</sup>	4.30. 10 <sup>-4</sup>
		1.0~ 18.2 (0.70 $P_u$ )	0.236. 10 <sup>5</sup> 1. 47. 10 <sup>5</sup>	6.51. 10 <sup>-4</sup>	7.00. 10 <sup>-4</sup>
		1.0~ 20.8 (0.80 $P_u$ )	0.142. 10 <sup>5</sup> 1. 18. 10 <sup>5</sup>	10. 4. 10 <sup>-4</sup>	10. 0. 10 <sup>-4</sup>



(2) Lagrange の方程式による場合の変位量  
前項の (b), (c) の関係より

$$u = (A \cos pt + B \sin pt) (C \cos p\sqrt{\lambda} x + D \sin p\sqrt{\lambda} x) \quad (f)$$

$$\text{ここ、} \quad p^2 = \frac{d^2 F(t)}{dt^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

(f)式の第2項にて

境界条件；

$$x = 0, \quad f(x) = 0 \quad \therefore C = 0$$

$$x = l, \quad \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \therefore D \neq 0, \quad \cos p\sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\therefore p = \frac{(2n-1)\pi}{2l\sqrt{\lambda}}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)x}{2l} \quad (g)$$

ここに、 $D = \sqrt{2}$  である。

よって、一般解は

$$u = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l} F_n(t) \quad (3)$$

(3)式より

$$\int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^l \{ \dot{F}_n(t) \}^2 2 \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l} dx$$

$$= \{ \dot{F}_n(t) \}^2 l$$

$$\int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^l \{ F_n(t) \}^2 2 \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{(2l)^2} \cos^2 \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l} dx$$

$$= \{ F_n(t) \}^2 \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} l$$

棒の縦振動の運動ならびにポテンシャルエネルギー  $T, V$  は

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A l \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{F}_n(t) \}^2 \\ V &= \frac{1}{2} EA \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A l \sum_{n=1}^{\infty} p^2 \{ F_n(t) \}^2 \end{aligned} \right\} (4)$$

つぎに、外力  $F_0(t)$  の  $F_n(t)$  方向の  $Q_n$  は

$$Q_n = F_0(t) f_n(x)_{x=l} = \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} F_0(t)$$

Lagrange の方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{F}_n(t)} \right) - \frac{\partial T}{\partial F_n(t)} + \frac{\partial V}{\partial F_n(t)} = Q_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{F}_n(t)} = \rho A l \ddot{F}_n(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial F_n(t)} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial F_n(t)} = \rho A l p^2 F_n(t)$$

これを代入して整理すると

$$\ddot{F}_n(t) + p^2 F_n(t) = \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{F_0(t)}{\rho A l} \quad (6)$$

ここに、

$$F_0(t) = P_0 + P_0' \sin \omega t \quad (\text{前出})$$

$$P_0 = P_1 + P_0', \quad P_0' = \frac{P_2 - P_1}{2}$$

いま、一般解は  $A \cos pt + B \sin pt$

特別解は、 $F_n(t) p = C_1 P_0 + C_2 P_0' \sin \omega t$  とおいて

$$\ddot{F}_n(t) p = -\omega^2 P_0' \sin \omega t$$

この関係を(6)式に代入して

$$-\omega^2 C_2 P_0' \sin \omega t + p^2 C_1 P_0 + p^2 C_2 P_0' \sin \omega t$$

$$= \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{P_0 + P_0' \sin \omega t}{\rho A l}$$

$t = 0, \quad \sin \omega t = 0$  の関係より

$$C_1 = \frac{1}{p^2} \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{1}{\rho A l}$$

また、

$$C_2 = \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{1}{p^2 - \omega^2} \frac{1}{\rho A l}$$

ゆえに、

$$F_n(t) p = \frac{P_0}{\rho A l p^2} \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$+ \frac{P_0'}{\rho A l (p^2 - \omega^2)} \sqrt{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \sin \omega t$$

よって、一般解と特別解とを加えることによって  $F_n(t)$  がきまる。

$$F_n(t) = A \cos pt + B \sin pt + \frac{\sqrt{2} P_0}{p^2 \rho A l} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{2} P_0'}{(p^2 - \omega^2) \rho A l} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \sin \omega t$$

式中、第1, 2項は自由振動の項にて、時間が経過するにつれ消滅する。第3, 4項は強制振動の項にて本実験の場合には後者の項を考えればよく、この  $F_n(t)$  の値を(3)式に代入すると、

$$u = \frac{2}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l} \frac{1}{p^2}$$

$$\left\{ P_0 + \left( 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right) \sin \omega t \right\}$$

ここに、

$$p^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2 \lambda}, \quad \lambda = \frac{\rho}{E} \quad (\text{前出})$$

$$u = \frac{2P_0 l}{AE} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l}$$

$$+ \frac{2P_0' l}{AE} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^2 (1 - \frac{\omega^2}{p^2})} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l} \sin \omega t \quad (7)$$

式中の  $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$ ,  $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{x}{l}$  の項を吟味し,  $x=l/2$  について計算し

$$P_n^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} \frac{E}{\rho} \quad \text{中, } n=1, 2, \dots \text{ 場合の } \rho \text{ を}$$

$\rho_1, \rho_2, \dots$  とすると

$$U = \frac{2P_0 l}{AE} \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \dots \right)$$

$$+ \frac{2P_0' l}{AE} \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\rho_1^2}\right)} - \frac{1}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\rho_2^2}\right)} - \frac{1}{25} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\rho_3^2}\right)} + \frac{1}{49} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\rho_4^2}\right)} \dots \right] \quad (8)$$

本実験において 300 rpm の場合の  $\sigma_{28}$  が 90, 155 kg/cm<sup>2</sup> 程度の場合の測定ひずみに対し, (3), (8)式について計算したひずみ値を示すと表 2 となる.

表 2

$\sigma_{28}$ kg/cm <sup>2</sup>	応力振幅 $t$	弾性係数 $E$ kg/cm <sup>2</sup>	測定ひずみ	(3) 式の値	(8) 式の値
90	1.0~ 7.2 (0.45 $P_u$ )	0.492. 10 <sup>5</sup> 1. 58. 10 <sup>5</sup>	2. 58. 10 <sup>-4</sup>	2. 33. 10 <sup>-4</sup>	2. 04. 10 <sup>-4</sup>
155	1.0~ 11.7 (0.45 $P_u$ )	0.755. 10 <sup>5</sup> 1. 98. 10 <sup>5</sup>	3. 35. 10 <sup>-4</sup>	3. 15. 10 <sup>-4</sup>	2. 53. 10 <sup>-4</sup>

### 6. 結 言

第 1 報に続いて上限, 下限荷重を定め, 逐次上限荷重を上昇せしめ各荷重段階でとくに繰返し回数を累加せしめて実験した結果は, 第 1 報の疲労に関する考察が動的挙動としてのひずみ測定値により立証できた. さらに, 繰返し負荷の場合の変位の関係を運動方程式により誘導し(3), (8)式をえ, 数値計算したところ実験値と割合によく一致する結果をえた.

終りに, 本研究に当りご支援頂いた最上幸夫教授,

実験にご協力頂いた長谷川博氏, 卒論の一色(藤田建設), 西林(大林建設), 別府(名古屋市), 松岡(日産建設)の諸君に厚く感謝の意を表する次第である.

### 参 考 文 献

- 1) 著者: 山口大学工学部研究報告 14 卷 2 号 (1965) 中の第 1 報に記述の参考文献に同じ.
- 2) 妹沢克雄: 振動学, 上下 (1949)
- 3) 後藤, 金多共訳: 振動工学 (1961)
- 4) S. Timoshenko: Strength of Materials (1941)