重力の作用下に於ける平行壁非定常流れ

山　根　信　太　郎

1. はしがき

非定常な流れについて層流のばあいの円管内の流れは種々解かれている。しかし平行壁についてはまだ解かれていないようである。そこでこゝでは平行壁について、圧力こう配は重力の作用するばあいについて解いてみる。

2. 基礎式

平行壁もしくは幅の広い矩形管が傾斜し $t<o$ なるときこれに水が充満しているとし $t>o$ の瞬間にバルブが開かれたとする。これが今考える場合のもつとも現実に近い例である。流路の底面を x 軸これに垂直なる方向を y 軸とする。簡単なために管幅は考えないものとし、平行壁間隔は a とする。

しかるときはナビア・ストークスの方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g\sin\theta+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

上式第二項は省略しうるから

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g\sin\theta+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2.1)$$

これを初期条件　$t=o$　$u=o$　(i)

境界条件　$y=o$　$u=o$　(ii)

$y=a$　$u=o$　(iii)

のもとに解く。問題を一般化するために無次元化すれば

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}=\omega+c\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \qquad (2.2)$$

$$\left.\begin{matrix}\bar{t}=o & \bar{u}=o\\ \bar{y}=o & \bar{u}=o\\ \bar{y}=1 & \bar{u}=o\end{matrix}\right\} \qquad (2.2)'$$

但し　$\bar{u}=\dfrac{u}{u_0}$　　$\bar{t}=\dfrac{tu_0}{a}$　　$\bar{y}=\dfrac{y}{a}$

$\omega=\dfrac{a}{u_0^2}g\sin\theta$　　$c=\dfrac{1}{R_e}=\dfrac{\nu}{u_0 a}$

$u_0=$ 定常流れになつた際の平均速度

$$=\frac{a^2 g\sin\theta}{12\nu}$$

このような問題を解くには演算子法が適当している。以後文字の－を省略して (2.2) にラプラス変換を施せば

$$su(s.y)-u(o.y)=\frac{\omega}{s}+cu_{yy}(s.y)$$

さて $u(o.y)=0$ であるから上式は

$$u_{yy}-\frac{s}{c}u+\frac{\omega}{s}=0 \qquad (2.3)$$

(2.3) の一般解は

$$u=A_1\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}y\right)+A_2\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}y\right)+\omega/s^2 \qquad (2.4)$$

境界条件　$u(s.o)=0$　$u(s.1)=0$ より A_1. A_2 を決定すれば

$$A_1=-\frac{\omega}{s^2}\left[\left\{1-\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\right\}\Big/\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\right\}\right]$$

$$A_2=-\frac{\omega}{s^2}\left[\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-1\right\}\Big/\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\right\}\right]$$

(2.4) にこれを代入すれば

$$u=\frac{\omega}{s^2}\left[1-\frac{\left\{1-\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\right\}\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}y\right)+\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-1\right\}\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}y\right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}\right] \cdots (2.5)$$

(2.5) の逆変換を求めるために第二項の分子を整理して

$$分子=\exp\left(\sqrt{\frac{s}{c}}y\right)-\exp\left(-\sqrt{\frac{c}{s}}y\right)+\exp\left\{(1-y)\sqrt{\frac{s}{c}}\right\}-\exp\left\{-(1-y)\sqrt{\frac{s}{c}}\right\}$$

$$=2\sinh(\alpha\sqrt{s})+2\sinh(\gamma\sqrt{s})$$

$$分母=2\sinh(\beta\sqrt{s})$$

但し　$\alpha=y/\sqrt{c}$　$\beta=1/\sqrt{c}$　$\gamma=(1-y)/\sqrt{c}$
しからば

$$u=\omega\left[\frac{1}{s^2}-\frac{\sinh(\alpha\sqrt{s})+\sinh(\gamma\sqrt{s})}{s^2\sinh(\beta\sqrt{s})}\right]\quad(2.6)$$

(2.6)　式の第二項は $s=0$ で２位、$\sinh(\beta\sqrt{s})=0$ で単極の特異点をもつている。第二項を留数計算すると $s=0$ に於ける留数は

$$第二項=\frac{\alpha}{s\beta}+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{3!\beta s}+\cdots\sum_0^\infty a_n(\alpha.\beta)s_n$$

$$+\frac{\gamma}{s\beta}+\frac{\gamma(\gamma^2-\beta^2)}{3!\beta s}+\cdots\sum^\infty a_n(\gamma.\beta)s_n$$

で結局

$$第二項=\frac{\alpha}{\beta}t+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{6\beta}+\frac{\alpha}{\beta}t+\frac{\gamma(\gamma^2-\beta^2)}{6\beta}$$

単極 $\sinh\beta\sqrt{s}=0$ の留数は

$$第二項=\frac{\sinh(\alpha\sqrt{s})e^{s_nt}}{s^2\sinh(\beta\sqrt{s})}+\frac{\sinh(\gamma\sqrt{s})e^{s_nt}}{s^2\sinh(\beta\sqrt{s})}$$

$$=\left[\frac{\sinh(\alpha\sqrt{s})e^{-n^2\pi^2t}}{\beta^2t\,2s\sinh(\beta\sqrt{s})+s^2\beta\cosh(\beta\sqrt{s}/2\sqrt{s})}\right]s_n=-n\frac{\pi^2\pi^2}{\beta^2}$$

$$+\left[\frac{\sinh(\gamma\sqrt{s})\quad\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\beta^2}t\right)}{2\sinh(\gamma\sqrt{s})s+s\sqrt{s}\cosh(\gamma\sqrt{s}/2)}\right]$$

$$s_n=-\frac{n^2\pi^2}{\beta^2}$$

$$=\sum_1^\infty\frac{2(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{\beta}n\pi\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\beta^2}t\right)\beta^2}{n^3\pi^3}$$

$$+\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}2\sin\left(\frac{\alpha}{\beta}n\pi\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\beta^2}t\right)}{n^3\pi^3}\beta^2$$

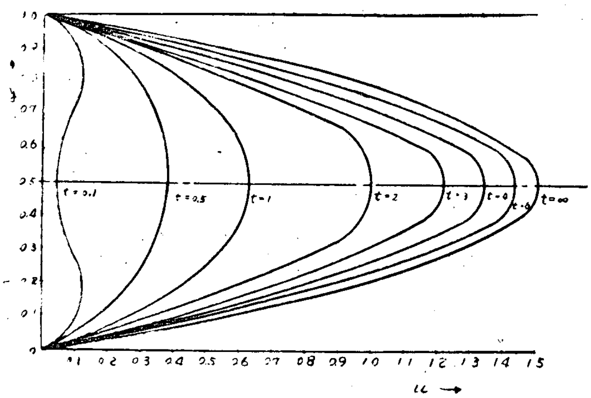
$$=\frac{2}{c\pi^3}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\exp(-n^2\pi^2ct)\{\sin n\pi y+\sin(1-y)n\pi\}$$

第一項は１であるかなら（2. 6）の逆変換は以上の結果を整理して

$$U=\frac{\omega}{c}\left[\frac{y(1-y)}{2}-\frac{2}{\pi^3}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\exp(-n^2\pi^2ct)\times\{\sin n\pi y+\sin n\pi(1-y)\}\right]\quad(2.7)$$

これが求める解である。（2. 7）式は境界条件を満足する。第二項は定常状態よりのおくれを示す項であり、t が増大すれば速やかに0に近づく。$t=\infty$ となればこれは消えるから u は定常速度　$u=\frac{\omega}{c}\left\{y(1-y)/2\right\}$ となる。

第　一　図
（重力の作用下に於ける平行壁非定常流れ）



速度分布の一例を示せば図の如くである。c が増すと第二項は減少するから u の定常分布よりのおくれは少くなる。c が増すことはレイノルズ数が減少することであるから傾斜がゆるくなることを意味する。傾斜がゆるやかになれば比較的早く定常状態に達する訳である。又逆に c が小さいとレイノルズ数は多くなるから傾斜が急で、定常よりのおくれは増すことになる。或は又間隔 a の増大もこれと同じ意味をもつ。任意時刻に於ける平均速度

$$V=\int_0^1 u\,dy=\left[1-\frac{12\times2^3}{\pi^4}\sum_1\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\exp(-n^2\pi^2ct)\right]\quad(2.8)$$

但し　$n=1.3.5.\cdots\cdots$

3.　過渡時間

大体どれ位の時間で定常状態になるかを調べるために（2.8）を利用する。（2.8）を書き直せば

$$V=1-0.986\exp(-\pi^2ct)$$
$$-0.0127\exp(-9\pi^2ct)$$
$$-\cdots\cdots\cdots$$

でこの第三項は第一項に比較して約 1.2% である。そこで第二項までを取つてみると

$$V=1-0.986\exp(-\pi^2\nu t/a^2)\quad(3.1)$$

今（3 1）の第二項が第一項に比して 0.01 より小になる時間をもつて過渡時間とすればこれはほゞ流体が動き始めてから定常状態になるまでの時間を示すものと考えられる。即ち

$$0.936\ \exp\left(-\pi^2\nu T/a^2\right) \leqq 0.01 \qquad (3.2)$$

$$\therefore \quad T \geqq 0.47\frac{a^2}{\nu} \qquad (3.3)$$

を得る。これは円管のばあいの$0.8a^2/\nu$に比べると約半分の値を示している。

$\nu=0.922 cm^2/sec$ のオリーブ油を使えば平行壁間隔が2cmでT=2.03秒4cmでT=8.12秒である。

原稿の閲読並びに有益な御助言を賜わつた九州大学葛西泰二郎教授に深謝の意を表する。

註1) 昭和27年10月16日機械学会広島地方講演会で講演。

自由平面をもつ水路を突然傾けたばあいの非定常流れ

山 根 信 太 郎

1. はしがき

層流のばあいについて今まで水平に置かれていた開水路が突然に或角度丈傾けられたとする。水は速度零から流れはじめる。

このようなばあいの水の速度を求めてみる。

2. 基礎式

水路の底線と自由表面とは平行であると仮定すれば、ナビア・ストークスの式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\sin\theta + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (2.1)$$

水面から底までの距離を a とすると初期及び境界条件は

$$t=0 \qquad u=0 \qquad (\mathrm{i})$$
$$y=0 \qquad u=0 \qquad (\mathrm{ii})$$
$$y=a \qquad u=f(t) \qquad (\mathrm{iii})$$

$$\bar{u}=u/u_0 \qquad \bar{t}=tu_0/a \qquad \bar{y}=y/a$$
$$\omega = ag\sin\theta/u_0^2$$
$$c=\nu/u_0 a$$

$u_0 = a^2 g\sin\theta/3\nu$ = 定常流れの平均速度

とおいて無次元化すれば

$$\partial\bar{u}/\partial\bar{t} = \omega + c\ \partial^2\bar{u}/\partial\bar{y}^2 \qquad (2.2)$$

境界条件は

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{t}=0 & \bar{u}=0 \\ \bar{y}=0 & \bar{u}=0 \\ \bar{y}=1 & \bar{u}=F(\bar{t}) \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

ここに$F(\bar{t})$は平行壁の間を流れる流体の時間函数に似ているとして

$$F(\bar{t}) = \alpha\delta\{1-\exp(\delta\bar{t})\} \qquad (2.4)$$

とおいて速度分布を求める。(2.4)式中のαは終末条件 $\bar{t}=\infty$で u が定常流になることから求まる定数である。

(2.2)にラプラス変換$\int_0^\infty e^{-st}(\cdots\cdots)\,dt$ を施せば

$$\bar{u}_{yy} - s\bar{u}/c + \omega/s = 0 \qquad (2.5)$$

$$\bar{u}(0.s)=0 \qquad \bar{u}(1.s)=f(s)=\alpha \times\left\{1/-sl/(s+\delta)\right\}$$

(2.5)に上の境界条件を入れると、(以後は一をのぞく)

$$A_1 = \left[f(s)-\omega\{1-\exp(-\sqrt{\tfrac{s}{c}})\}\right]/\Big\}\exp(\sqrt{\tfrac{s}{c}})-\exp(-\sqrt{\tfrac{s}{c}})\Big\}$$

$$A_2 = \left[-f(s)+\omega\{1-\exp(\sqrt{\tfrac{s}{c}})\}/s^2\right]/\left\{\exp(\sqrt{\tfrac{s}{c}})-\exp(-\sqrt{\tfrac{s}{c}})\right\}$$

$$\alpha=y/\sqrt{c} \quad \beta=1/\sqrt{c} \quad \gamma=(1-y)/\sqrt{c}$$

として

(2.5)の一般解を求めれば

$$n = f(s)\left\{\exp(\alpha\sqrt{s})-\exp(-\alpha\sqrt{s})\right\}/\left\{\exp(\beta\sqrt{s})-\exp(-\beta\sqrt{s})\right\}$$