ガラス生成反應に於ける數理統計的考察　（第3報）

矢　田　部　俊　一

1. 緒　言

SiO_2-Na_2O, $2SiO_2-Na_2O$, $4SiO_2-Na_2O$, SiO_2-Na_2O-CaO,
$2SiO_2-Na_2O-CaO$, $4SiO_2-Na_2O-CaO$,
SiO_2-PbO を一定温度一定時間加熱後 SiO_2以外の物を除き反応した SiO_2 粒子の直径の 分布を 求め第1報第2報にて Student Test を用いて反応進行程度を検定したが本報に於ては此の粒子の直径の分布が如何なる母集団分布に最も良くあてはまるかを考察して見る。即ち之の分布を良く現すと思れる二三の母集団を想定し χ^2 検定法を用いて何れの分布が最も適当であるかを考察して見る。

2. 母集團分布の母數の推定

標本を母集団から得たとして母集団分布を想定した時その母集団分布に含まれる母数 θ を標本値から如何にして推定するかが問題に成る之の母数θを想定するには種々の方法がある、n個の標本値 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ をのみ用いてθを推定するのであるから推定値 $\hat{\theta}$ は

$$\hat{\theta}=f_\theta(x_1x_2\cdots\cdots x^n)$$

と表される併るに $(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ は同一の母集団分布を定め且相互に独立な確率変数 $(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ の一組の実現値であるから $\hat{\theta}$ は 対応する統計量

$$x=f_\theta(x_1x_2\cdots\cdots x_n)$$

の同じく実現値と成る推定値 $\hat{\theta}$ を実現値として持つ統計量を母数 θ の推定量と云う。
推定量 x に関して母数 θ の如何なる値に対しても

$$E(x)=\theta$$

の成り立つ時 x を不偏推定量と云う、母集団分布の母集 θ の推定量は不偏推定量に限つても幾通りも考へられる、 θ の二つの不偏推定量 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$に於ても若し総ての母集θの値に対して

$$\sigma^2(x^{(1)})<\sigma^2(x^{(2)})$$

であれば$x^{(1)}$の方が$x^{(2)}$よりも正確な推定量と云えよう、同一の母集団Pから一定の大きさnの種々の放意標本

$$[x_1^{(k)}\ x_2^{(k)}\cdots\cdots x_n^{(k)}]\quad k=1,2,\cdots\cdots n$$

を取る時n組の放意標本に対して

$$x^{(1)}=f_1(x_1x_2\cdots\cdots x_n)\quad x^{(2)}=f_2(x_1x_2\cdots\cdots x_n)$$

に関して

$$\theta_k^{(1)}=f_1(x_1^{(k)}x_2^{(k)}\cdots\cdots x_n^{(k)})$$
$$\theta_k^{(2)}=f_2(x_1^{(k)}x_2^{(k)}\cdots\cdots x_n^{(k)})$$
$$k=1,2,\cdots\cdots n$$

を作る、個々のkに対して $\hat{\theta}_k^{(1)}$と $\hat{\theta}_k^{(2)}$ と何れが θ により近いかと云う事はわからない併し $\sigma^2(x^{(1)})<\sigma^2(x^{(2)})$ であれば十分大きいnに対して大標本の理論に依り $(\hat{\theta}^{(1)}_1\cdots\cdots\hat{\theta}^{(1)}_n)$ $(\hat{\theta}^{(2)}_1\cdots\cdots\hat{\theta}^{(2)}_n)$ を全体考えれば母数θの値如何に拘らず前者の方が後者よりも分散が小と成つてその平均値の周りの近くに集る傾向があると云える。ある種の制限の下に θ の不偏推定量 $x=f_\theta(x_1\cdots x_n)$ を如何に取つても θ の如何に拘らず

$$\sigma^2(x)\geq\frac{1}{n\int_x^x\left(\frac{\partial\log f}{\partial\theta}\right)f(x)\,dx}\qquad(1)$$

の成り立つ事が証明される此処に母数 θ の値が θ である時の母集団分布の確率密度を $f(x,\theta)$ とおいた。従て若し総ての θ に対して (1) が等号の成立つ 不偏推定量 $x^\times$ があれば何んな不偏推定量 x に対しても

$$\sigma^2(x^\times)\leq\sigma^2(x)$$

と成るしかも (1) が常に等号の成立する θ の不偏推定量 $x^\times$ が若し存在すればそれは唯一である事が 証明される此の時 $x^\times$ を有効推定量と云う、若し母集 θ の有効推定量 $x^\times$ が存在すれば $x^\times=\overset{\times}{f_0}(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ の函数形 $\overset{\times}{f_0}$ は最尤法で求められる即ち母集団分布の確率密度を母数 θ をパラメーターとして $f(x,\theta)$ と現わす時標本値 $(x_1\cdots\cdots x_n)$ に対して

$$L(x_1x_2\cdots\cdots x_n,\theta)=f(x_1\theta)f(x_2\theta)\cdots\cdots f(x_n\theta) \qquad (2)$$

とおく之れは母数θを定めると放意標本($x_1x_2\cdots\cdots x_n$)に対応するn次元確率変数($x_1 x^2\cdots\cdots x_n$)のn次元確率密度を現している。逆に標本値($x_1x_2\cdots\cdots x_n$)を定めた時(2)を母数θの函数と見て之れを尤度函数と云う。($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)を定めた時母数θの二つの値θ_1, θ_2に対して

$$L(x_1 x_2\cdots\cdots x_n,\theta_1)>L(x_1 x_2\cdots\cdots x_n,\theta_2)$$

と云う事は

$P(x_1\leqq X_1<x_1+dx_1\cdots\cdots x_n\leqq X_n<x_n+dx_n,\ \theta=\theta_1)>P(x_1\leqq X_1<x_1+dx_1\cdots\cdots x_n\leqq X_n<x_n+dx_n,\ \theta=\theta_2)$を現している特に($x_1x_2\cdots\cdots x_n$)をあたえて

$$L(x_1 x_2\cdots\cdots x_n,\theta)=\text{最大}$$

ならしめるθの値を

$$\theta=\hat{\theta} \qquad (3)$$

とする時$\hat{\theta}$は($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)に対して

$$P(x_1\leqq X_1<x_1+dx_1\cdots\cdots x_n\leqq X_n<x_n+dx_n,\ \theta=\hat{\theta})$$

を最大にする即ち($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)が最もおこり易いθの値を定める事になる($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)の函数として(3)なる$\hat{\theta}$が唯一つ存在する時

$$\hat{\theta}=f_{\hat{0}}(x_1\cdots\cdots x_n)$$

に対する確率変数

$$\hat{X}=f_{\hat{0}}(X_1\cdots\cdots X_n)$$

を最尤推定量と云う、母集団分布の母数θの推定量として最尤推定量を用いる。

3. SiO_2粒子の直徑の母集團分布の母數

$Si\,O_2$粒子の直径の母集団分布として正規分布Poisson分布対数正規分布を想定しまずその母数を求める。

母集団Pから大きさnの放意標本($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)を得た時之れを記述統計の方法に依り整理する即ち($x_1 x_2\cdots\cdots x_n$)の中$a_1 a_2\cdots\cdots a_r$の度数を$f_1 f_2\cdots\cdots f^r$とする($f_1+f_2+\cdots\cdots+f^r=n$)

i) 正規分布

母集団が$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$なる正規分布であると想定した時n個の放意標本($x_1\cdots\cdots x_n$)を得たとすればm, σを共に未知の母数として最尤法に依りm, σの最尤推定量$\hat{m}$, $\hat{\sigma}$を求める

$$N(m,\sigma^2)=f(x,m,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x_1x_2\cdots x_n,m,\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{\frac{-\Sigma(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\Sigma(x_i-m)^2=0$$

$$\frac{\partial\log L}{\partial m}=\frac{\Sigma(x_i-m)}{\sigma^2}=0$$

$$\therefore\ \hat{m}=\frac{1}{n}\Sigma x_i\quad(\hat{\sigma})^2=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\hat{m})^2$$

$$\therefore\ \hat{m}=\frac{1}{n}\Sigma f_i a_i$$

$$(\hat{\sigma})^2=\frac{1}{n}\Sigma f_i(a_i-\hat{m})^2$$

$$=\frac{1}{n}\Sigma f_i\ a_i^2-(\hat{m})^2$$

上式で得た$\hat{m}$, $\hat{\sigma}$は母集団分布の標本平均値標本分散に等しい。

ii) Poisson 分布

母集団が$f(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$なるPoisson分布であると想定した時(i)と仝様に未知母数λの最尤推定量を求める

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$L(x_1 x_2\cdots\cdots x_n,\lambda)=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{x1+x2+\cdots\cdots xn}}{x_1!\ x_2!\cdots\cdots x_n!}$$

$$\frac{2\log L}{\partial\lambda}=n-\frac{1}{\lambda}(x_1+\cdots\cdots+x_n)=0$$

$$\lambda=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\hat{\lambda}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{\Sigma f_i\ a_1}{n}$$

iii) 対数正規分布

母集団分布が$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{\frac{-(\log x-m)^2}{2\sigma^2}}$なる対数正規分布であると想定した時(i)と同様に未知母数m, σの最尤推定量$\hat{m}$, $\hat{\sigma}$を求める。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{\frac{-(\log x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(x_1x_2\cdots x_n, m, \sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n x_1\cdots x^n} e^{\frac{-\Sigma(\log x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\Sigma(\log x_i-m)^2=0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial m}=\frac{1}{2\sigma^2}[2\Sigma(\log x_i-m)]=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{n}\Sigma\log x_i=\hat{m}$$

$$(\hat{\sigma})^2=\frac{1}{n}\Sigma(\log x_i-m)^2$$

$$\therefore\quad \hat{m}=\frac{1}{n}\Sigma f_i\log a_i$$

$$(\hat{\sigma})^2=\frac{1}{n}\Sigma f_i(\log a_i-\hat{m})^2$$

$$=\frac{1}{n}\Sigma f_i(\log a_i)^2-(\hat{m}^2)$$

4. χ^2 分 布

粒子の直径の度数分布を現わすと思われる二三の母集団分布を想定しその中に含まれる未知母数を上述の方法で推定した後之の母集団分布が実験で得た度数分布と良く適合するか否かを検定するのに χ^2 検定法を用いる。

χ^2 検定法を述べる前にそれに必要な χ^2 分布を説明する。

r 個の排反事象 $E_1\ E_2\cdots\cdots E_r$があつて $P(E_i)=P_i\cdot P_1+P_2+\cdots\cdots+P_r=1$とする。$E_1\ E_2\cdots\cdots E_r$がおこつた時それぞれ $a_1\ a_2\cdots\cdots a_r$ なる値を取るとする、n 回の独立試行に依りそれぞれ事象が $f_1\ f_2\cdots\cdots f_r$ 回おこる時 $f_1+f_2+\cdots\cdots+f_r=n$

$$m_i=nP_i,\quad f_i-m_i=f_i-nP_i=\delta n_i$$

$$i=1,2,\cdots r,\quad \left|\frac{\delta n_i}{m_i}\right|<1$$

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(f_i-m_i)^2}{m_i}=\Sigma\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}\qquad(1)$$

とおけば χ^2 があたえられた値 χ^2_0 より小なる値を取る確率 $P(\chi^2<\chi^2_0)$ は n が大きい時次式であたえられる

$$P(\chi^2<\chi^2_0)=\frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}\int_0^{\chi_0^2}(\chi^2)^{\frac{r-3}{2}}e^{\frac{-1}{2}\chi^2}d\chi^2$$

確率密度

$$f_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n-2}{2}}\delta^{\frac{-1}{2}x}$$

に依り定められる分布を自由度 n の χ^2 分布と云うから (1) はnが大きい時自由度 $r-1$ の χ^2 分布に従う。

$$\therefore\quad(\chi^2>\chi^2_0)=\frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}\int_{\chi_0^2}^{\infty}\chi^{2\frac{r-3}{2}}e^{\frac{-1}{2}\chi^2}b\chi^2$$

であるから $\chi^2_1>\chi^2_2$ の時

$$P(\chi^2>\chi^2_2)>P(\chi^2>\chi_1)$$

5. 母集團分布と放意標本 $(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ の定める度數分布との比較 χ^2 檢定法

母集団分布が R 個の母集 $\theta_1\ \theta_2\cdots\cdots\theta_n$ を含んでいる時その母集団 P に属する大きさ n の放意標本 $(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ から $\theta_1\cdots\cdots\theta_R$ を最尤法で推定して分布 F を決定すると

今仮設 H として「母集団分布が F である」を取る此の母集団 P に属する大きさ n の放意標本を取て $(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)$ の中 $a_1\ a_2\cdots\cdots a_r$ の度数を $f_1\ f_2\cdots\cdots f_r\ (f_1+f_2+\cdots\cdots f_r=n)$ であるとし

$$F\ (X=a_i)=P_i$$

の時

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(f_i-nP_i)^2}{nP_i}$$

を求める。χ^2 に対する確率変数は比較的一般的なゆるい条件の下に確率変数 $\chi^{(n)}$は十分大きいnに対して自由度 $r-R-1$ の χ^2 分布を定める

従て

$$P(\chi^2>\lambda)=\alpha=0.01$$

の値λを定めれば χ^2 が

$$\chi^2>\lambda$$

ならば仮設Hは捨てられ又

$$\chi^2\leqq\lambda$$

ならば仮設は捨てられない、実際には上の近似が許される為には総ての nP_i が10より大きい様にする。

正規分布 Poisson 分布対数正規分布に於て母

数がそれぞれ２個、１個、２個で測定結果 r が 11、10、９、８、７の度合が現れるから自由度は９、８、７、６、５、４の度合がおきる。

χ^2 分布のテーブルより此の自由度に於て $\alpha=0.01$ の時は

自由度	4	5	6	7	8	9	10
λ	13.5	15.0	17.0	19.0	20.0	21.6	23.0

(2)

又　　$\lambda_1 > \lambda_2$ の時

$$P(\chi^2 > \lambda_2) > P(\chi^2 > \lambda_1)$$

故に SiO_2 粒子の度数分布に上記の三つの母集団を想定しそれに依り χ^2 を求めれば χ^2 の最も小なものが最も良く度数分布を表わす母集団分布であり又 (2) の λ の値よりその現わす程度を知る事が出来る。

6. 實驗結果

例　$4SiO_2-Na_2O$ を 400°C 6 hr 反応させた（実験番号 (19)）後の SiO_2 粒子の直径の度数分布として第２報に発表した様に次の値を得た。

a：直径　f：直径aの度数

a	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	計
f	4	25	106	173	211	185	142	142	79	14	994

(1)

(1)なる度数分布に対して対数正規分布を想定しそのあてはまりの良し悪しを χ^2 検定法を用いて検定して見る。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\,e^{\frac{-(\log x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

なる対数正規分布の母数 m, σ を (1)なる標本値より §3 に依り最尤法に依り求めその値を $\hat{m}$ $\hat{\sigma}$ とし之れに依り母集団分布 F を決定する。

$$F(X,\hat{m},\hat{\sigma})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}\,\chi}\,e^{\frac{-(\log x-m)^2}{2(\hat{\sigma})^2}}$$

之れより $F(X=a_i,\ \hat{m},\ \hat{\sigma})=P_i$ を求め χ^2 を次の如く計算する。

a	f	loga	floga	$(\log a)^2$	$f(\log a)^2$	$\left\lvert\frac{\log a-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right\rvert$	$Pa\hat{\sigma}$	P	nP	$\frac{(f-nP)^2}{nP}$
0.7	4 (29	−0.357	−1.42	0.128	0.512	3.02	0.000417	0.037	3.68)26.48	0,24
0.8	25	−0.223	5.63	0.050	1.240	2.28	0.002965	0.0229	22.8	
0.9	106	−0.105	−11.10	0.011	1.165	1.46	0.013742	0.0945	94.0	1.53
1.0	173	0	0	0	0	0.80	0.028969	0.179	179.0	0.201
1.1	211	0.095	20.10	0.009	1.920	0.207	0.039024	0.220	219.0	0.292
1.2	185	0.182	33.60	0.033	6.170	0.333	0.037780	0.195	194.0	0.417
1.3	142	0.262	37.20	0.069	9.850	0,827	0.002869	0.135	134.0	0.477
1.4	79	0.336	26.60	0.113	8.930	1.285	0,017360	0.0767	76.3	0.0957
1.5	55	0.405	22.30	0.164	9.03	1.715	0.009089	0.0376	76.4	8.27
1.6	14	0.470	6.58	0.222	3.11	2.12	00004217	0.0163	16,2	0.30
n=994			128.23		41.927					$\chi^2=11.82$

$$\hat{m}=\frac{\Sigma f_i \log a_i}{n}=\frac{128.23}{994}=0.128$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\Sigma f_i(\log a_i)^2}{u}-(\hat{m})^2}=\sqrt{\frac{41.927}{994}-(0.128)^2}=0.161$$

自由度 $=r-R-1=9-2-1=6$

$\alpha=0.01$ の時 §5 (1) より $\lambda=17.0$

$$\chi^2=11.82<17.0$$

従て此の度合 SiO_2 粒子の分布は対数正規分布と考えて良い。

上述と同様に計算を行い第２報に発表した度数分布を現わすと想定される母集団分布より χ^2 を計算して母集団のあてはまりの良し悪しを検定した。

記号 n, P, l: 母集団をそれぞれ正規分布 Poisson 分布対数正規分布と想定した時の χ^2 のそれぞれの値

a：自由度

SiO_2-Na_2O

	(1) 400°C	(2) 400°C	(3) 400°C	(4) 600°C
n	34.38 (a=6)	41.95 (a=7)	47.68 (a=7)	26.54 (a=6)
P	27.50 (a=7)	49.50 (a=8)	32.98 (a=8)	36.62 (a=8)
l	26.64 (a=6)	28.23 (a=6)	1,.23 (a=6)	24.90 (a=6)
	(5) 600°C	(6) 600°C	(7) 800°C	(8) 800°C
n	62.43 (a=7)	27.37 (a=7)	8.66 (a=6)	17.39 (a=6)
P	61.58 (a=8)	47.95 (a=7)	15.02 (a=8)	17.36 (a=8)
l	27.23 (a=9)	16.24 (a=9)	18.49 (a=6)	12.20 (a=5)

2　SiO_2 — Na_2O

	(9) 400°C	(10) 400°C	(11) 400°C	(12) 600°C
n	226.04 (a=6)	39.92 (a=7)	28.86 (a=7)	35.68 (a=7)
P	45.18 (a=7)	79.44 (a=7)	259.45 (a=9)	184.79 (a=7)
l	9.27 (a=6)	20.05 (a=6)	23.48 (a=7)	16.75 (a=7)
	(13) 600°C	(14) 600°C	(15) 800°C	(16) 800°C
n	42.37 (a=7)	20.14 (a=7)	20.74 (a=6)	22.14 (a=6)
P	7.24 (a=7)	20.38 (a=7)	49.36 (a=8)	56.64 (a=8)
l	14.25 (a=6)	13.85 (a=6)	5.31 (a=5)	29.18 (a=7)

4　SiO_2 — Na_2O

	(17) 800°C	(18) 400°C	(19) 400°C	(20) 400°C
n	19.40 (a=6)	25.89 (a=7)	170.67 (a=5)	48.72 (a=6)
P	26.33 (a=8)	62.36 (a=9)	37.79 (a=8)	35.82 (a=9)
	15.00 (a=5)	14.95 (a=6)	11.82 (a=6)	13.63 (a=6)
	(21) 600°C	(22) 600°C	(23) 600°C	(24) 800°C
n	49.43 (a=6)	70.16 (a=6)	55.62 (a=6)	50.02 (a=6)
P	16.22 (a=8)	40.60 (a=8)	21.13 (a=8)	37.74 (a=8)
l	9.69 (a=5)	19.50 (a=5)	18.03 (a=6)	17.48 (a=7)

SiO_2 — Na_2O — CaO

	(25) 800°C	(26) 400°C	(27) 400°C	(28) 400°C
n	93.89 (a=6)	25.98 (a=6)	16.55 (a=6)	9.78 (a=6)
P	26.51 (a=8)	80.82 (a=7)	18.67 (a=7)	135.61 (a=7)
l	43.31 (a=6)	29.60 (a=5)	2.34 (a=5)	5.20 (a=6)

2　SiO_2—Na_2O—CaO

	(29)	(30) 600°C	(31) 400°C	(32) 400°C
n	[illegible].38 (a=5)	23.26 (a=6)	41.90 (a=5)	22.69 (a=5)
P	[illegible].89 (a=7)	16.31 (a=7)	137.09 (a=7)	28.11 (a=7)
l	[illegible].72 (a=5)	2.44 (a=9)	10.49 (a=5)	28.29 (a=6)
	(33) 400°C	(34) 600°C	(35) 600°C	(36) 800°C
n	13.54 (a=6)	25.69 (a=5)	56.89 (a=6)	32.58 (a=4)
P	73.69 (a=8)	30.16 (a=8)	76.81 (a=7)	47.51 (a=6)
l	2.23 (a=5)	9.69 (a=6)	5.86 (a=4)	13.88 (a=4)

4　SiO_2—Na_2O—CaO

	(37) 400°C	(38) 400°C	(39) 600°C	(40) 600°C
n	42.37 (a=5)	30.62 (a=4)	15.71 (a=5)	17.71 (a=5)
P	12.02 (a=6)	13.22 (a=6)	38.52 (a=8)	72.02 (a=7)
l	6.28 (a=5)	10.77 (a=5)	8.64 (a=5)	11.90 (a=5)

SiO_2 -- PbO

	(41) 800°C	(42) 400°C	(43) 400°C	(44) 600°C
n	11.28 (a=4)	11.57 (a=4)	23.58 (a=3)	23.67 (a=5)
P	72.91 (a-5)	14.82 (a=6)	65.86 (a=6)	64.46 (a=6)
l	25.74 (a=4)	18.42 (a=5)	12.29 (a=4)	48.80 (a=5)

上の表に示した様に正規 Poisson 対数正規分布について χ^2 を計算した結果少しの例外を除いて多くの場合

$$l < n \qquad l < P$$

が成立する即ち三つの想定した母集団中対数正規分布が最も良く SiO_2 粒子の直径の度数分布を現わす事がわかる又§5の(1)の値より対数正規分布に SiO_2 粒子の直径の度数分布が従うと殆ど断定出来る度合が非常に多いゝ、故に大体 SiO_2 粒子の直径の分布は対数正規分布と考えれらる。

7. 結　言

44の実験より粒子の度数分布を得た χ^2 検定を用いてその度数分布を現わすと思われる、母集団分布として対数正規分布を得た。

管による砂輸送における管径の影響について

小　川　　元

1. 要　旨

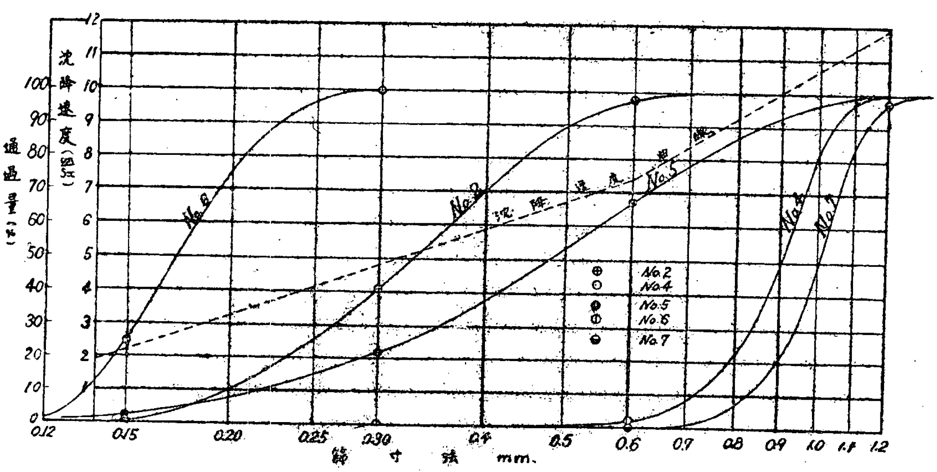
1 1/2″ 管及び 2″ 管による種々の砂の流送を比較し、その管径による差異を、定性的に求めたものである。

2. 實　験

2″ 管によるものは既に発表した1) 及び.2)とし、1 1/2″管によるものを次に示す。

実験方法その他は、2″ 管の場合と同様である。管は内面亜鉛渡した、内径41.3mmの鋳鉄管で、助走区間2.8m (68D但しD=内径) 測定区間2.5m (60D)、であつた。使用した砂の粒度曲線は図—1の如くで、図中の点線は、その粒度の砂粒の、一粒づつの平均的沈降速度を実測によつて求めて示してある。

第 1 図　砂の粒度曲線



また各砂の種類及び物理的性質は表—1の如くである。