密閉垂直並びに水平二重管内、自由對流、速度分布の第0次近似について

村　川　勝　彌

1. 緒　言

自由対流、熱伝達に必要なので理論解及び数値計算を行つた。

2. 密閉垂直二重管内、自由對流、速度分布

(1) 流体力学の基礎式；

$$C_r\cdot\frac{\partial C^r}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_r}{\partial Z}=\nu.\left(\nabla^2 C_r-\frac{C_r}{r^2}\right) \tag{1}$$

$$C\cdot\frac{\partial C}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C}{\partial Z}=\nu\cdot\nabla^2 C_Z+g\cdot t \tag{2}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad t=(T-T_0)/T_0,$$

T_0=外部の一定温度（室温）

連続の式；

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{\partial C_z}{\partial z}=0 \tag{3}$$

境界条件；

$$\left.\begin{array}{llll}(C_r)_{Z=0}=0, & (C_r)_{Z=L}=0, & (C_r)_{r=r_1}=0, & (C_r)_{r=r_2}=0,\\ (C_Z)_{Z=0}=0, & (C_Z)_{Z=L}=0, & (C_Z)_{r=r_1}=0, & (C_Z)_{r=r_2}=0,\end{array}\right\} \tag{4}$$

(2) エネルギー式；

$$C^r\cdot\frac{\partial t}{\partial r}+C_z\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial Z^2}\right) \tag{5}$$

(3) 流れ函数Ψ；

$$C_Z=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r},\quad C_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} \tag{6}$$

$$\Psi=\alpha\cdot L/G_r\cdot\phi,\quad (G_r=\text{Grashof number}) \tag{7}$$

(2)式より t をΨ,従つてϕで表はし(5)式に代入して、これから(1)式を r と Z とで夫々一回微分した式にαを掛けたものを引けば(2)式の $g\cdot t$ の項が消去できるから

$x=(r-r_1)/(r_2-r_1),\quad z=Z/L$

とおいて無次元化して線型項を $L(\phi)$，非線型項を$N(\phi)$で表はせば原式は

$$L(\phi)=N(\phi)$$

となるから

$$L(\phi)=\lambda\cdot N(\phi) \tag{8}$$

$$\phi=\phi_0+\lambda\cdot\phi_1+\lambda^2\cdot\phi_2+\lambda^3\cdot\phi_3+ \tag{9}$$

（最後に$\lambda=1$とおく）とおいて(8)式に代入してλの係数を比較すれば

$$L(\phi_0)=0 \tag{10}$$

即ち第0次近似を得るから(4)の境界条件を満足する(10)式の解を求めればよい。

(4) 第0次近似：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^3\phi_0}{\partial x\partial z^2}\left\{\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}-\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}\right\}\\&+\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^2\partial z^2}\left[-\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\right.\\&\left.\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\right]+\frac{\partial^5\phi_0}{\partial x^3\partial z^2}\left[\frac{2}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}-\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\right.\\&\left.\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\right]+\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\cdot\frac{9}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^5}-\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\cdot\\&\frac{9}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^4}+\frac{\partial^3\phi_0}{\partial x^3}\frac{5}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}-\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4}\cdot\\&\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}+\frac{\partial^5\phi_0}{\partial x\partial z^4}\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\left[1-\right.\\&\left.\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\right]+\frac{\partial^4\phi_0}{\partial z^4}\left[\left(\frac{r^2-r_1}{L}\right)^2\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\right]+\\&\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{\partial^5\phi_0}{\partial x^5}=0\end{aligned} \tag{11}$$

境界条件(4)を満足するように

$$\begin{aligned}\phi_0=&[\{x(1-x)\}^2+A_3\{x(1-x)\}^3+A_4\{x(1\\&-x)\}^4+\cdots\cdots][z(1-z)]^2+[\{x(1-x)\}^2\\&+B_3\{x(1-x)\}^3+\cdots\cdots][z(1-z)]^3+\\&[\{x(1-x)\}^2+\cdots\cdots][z(1-z)]^4+\end{aligned} \tag{12}$$

とおき $r_2/r_1\leqq 2$ なるときは

$1/\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)$ を二項定理により展開し (11), (12)式から係数A_3, A_4, B_3,を決定すると（r_2/r_1にかかわらず一般の場合は(12)式の右辺に$\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^4$を掛けた式を$\phi_0$として使用すればよい）

$A_3=(8a+48+32b^2)/(24-12b^2)$,
$a=(r_2-r_1)/r_1,\quad b=(r_2-r_1)/L$,
$B_3=\{-48a(1-b^2)-144(2-b^2)+72A_3(2-b^2)+24a(1-b^2)+72(2-b^2)\}/36(2-b^2)$,
$A_4=[-8a^2(1-b^2)-48\{a(1-b^2)+3-b^2\}+A_3\{24a(1-b^2)+144(2-b^2)\}+192(1-b^2)]/48(2-b^2)$, ………

かくのごとくして z 方向の速度分布 $\frac{\partial\phi_0}{\partial x}$ が求められる。（計算に100頁を要した）

(5)　数値計算例：

$r_2/r_1=d_2/d_1=55\text{mm}/35\text{mm}=1.571428$,
$L=1300\text{mm},\quad a=0.571428,\quad b=0.0076923$,
$A_3=2.190619,\quad B_3=2.190769$,
$A_4=7.071835$, ………

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial x}=(1-2x)[2x(1-x)+6.571859\{x(1-x)\}^2+28.28734\{x(1-x)\}^3+\cdots][z(1-z)]^2+(1-2x)[2x(1-x)+6.572230\{x(1-x)\}^2+\cdots\cdots][z(1-z)]^3+(1-2x)[2x(1-x)+\cdots\cdots][z(1-z)]^4+\cdots\cdots$$

これを図示すればFig. 1のごとくなる。

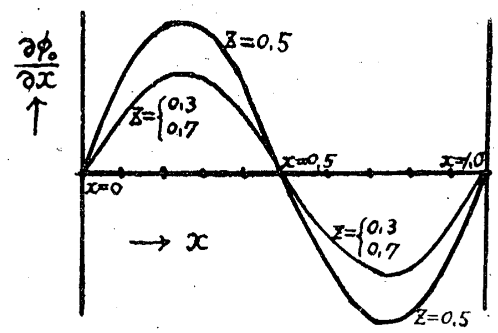

Fig. 1.　密閉、垂直、二重管内の自由対流、無次元速度分布 $\left(\frac{r_2}{r_1}=\frac{55\text{mm}}{35\text{mm}},\ L=1,300\text{mm}\right)$

3.　水平二重管内、自由對流、速度分布：

(1)　流体力学の基礎式：

$$C_r\cdot\frac{\partial C_r}{\partial r}+\frac{C_\theta}{r}\frac{\partial C_r}{\partial\theta}-\frac{C_\theta^2}{r}=-g\cdot t\cdot\cos\theta+\nu\left(\nabla^2C_r-\frac{C_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta}\right)\tag{1}$$

$$C_r\cdot\frac{\partial C_\theta}{\partial r}+\frac{C_\theta}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta}+\frac{C_r\cdot C_\theta}{r}=-g\cdot t\cdot\sin\theta+\nu\left(\nabla^2C_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial C_r}{\partial\theta}-\frac{C_\theta}{r^2}\right)\tag{2}$$

$t=(T-T_0)/T_0$,　T_0=外部の一定温度（室温）

連続の式：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta}=0\tag{3}$$

境界条件：

$$(C_r)_{r=r_1}=0,\quad(C_r)_{r=r_2}=0,\quad(C_\theta)_{r=r_1}=0,\quad(C_\theta)_{r=r_2}=0\tag{4}$$

(2)　流れ函数 Ψ：

$$C_\theta=\frac{\partial\Psi}{\partial r},\quad C_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\tag{5}$$

$$\Psi=\nu/G_r\cdot\Phi=\nu\cdot C\cdot\Phi\quad(\because C=1/G_r)\tag{6}$$

$(1)\times\sin\theta-(2)\times\cos\theta$

によつて g·t の項を消去し、$x=(r-r_1)/(r_2-r_1)$ とおいて無次元化すれば

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial\theta^2}-\frac{2}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]+\tan\theta\cdot\\&\left[\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial\theta}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right]+C\left[\tan\theta\right.\\&\left\{-\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right\}\\&+\left\{\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right\}\left.\right]=0\end{aligned}\tag{7}$$

となるから

$$\Phi=\Phi_0+C.\Phi_1+C^2\cdot\Phi_2+C^3\cdot\Phi_3+\cdots\cdots\cdots\tag{8}$$

$$\Phi_0={}_0\phi_0+\lambda_0\cdot{}_0\phi_1+\lambda_0^2\cdot{}_0\phi_2+\lambda_0^3\cdot{}_0\phi_3+\cdots\cdots$$
$$\Phi_1={}_1\phi_0+\lambda_1\cdot{}_1\phi_1+\lambda_1^2\cdot{}_1\phi_2+\lambda_1^3\cdot{}_1\phi_3+\cdots\cdots\tag{9}$$

（最後に $\lambda_0=\lambda_1=\cdots\cdots\cdots=1$ とおく）

$${}_0\phi_0=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\,\theta/n\cdot[\{x(1-x)\}^2+A_3\{x(1-x)\}^3+A_4\{x(1-x)\}^4+A_5\{x(1-x)\}^5+\cdots\cdots]=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\,\theta/n\cdot\varphi_n(x)\tag{10}$$

とおけば境界条件 (4)を満足するから (10)式を (7) 式に代入すると第0次近似として次の常微分方程式を得る。

(3) 第0次近似：

$$\frac{d^3\varphi_n}{dx^3}+\frac{1}{x+\frac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}-\left(\frac{1}{n^2}+1\right)\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2}\cdot\frac{d\varphi_n}{dx}+\frac{2}{n^2}\frac{1}{\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3}\cdot\varphi_n=0 \qquad (11)$$

$r_2/r_1\leqq 2$ の場合を考へる。(r_2/r_1 にかかわらず一般の場合は(10)式の $\varphi_n(x)$ に $\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^3$ を乗じた式を $_0\phi_0$ として使用すればよい)

$A_3=2-1/3\cdot(r_2-r_1)/r_1,\quad A_4=5/2-7/12\cdot(r_2-r_1)/r_1+1/12\cdot(3+1/n^2)(r_2-r_1)^2/r_1^2,$

$A_5=A_3[-3+3/5\cdot(r_2-r_1)/r_1+1/20\cdot(r_2-r_1)^2/r_1^2\cdot(3+1/n^2)]+A_4[4-1/5\cdot(r_2-r_1)/r_1]-1/6\cdot(r_2-r_1)/r_1+(r_2-r_1)^2/r_1^2\cdot[-1/5-1/10\cdot(1+1/n^2)]+1/30\cdot[1-1/n^2]\cdot(r_2-r_1)^3/r_1^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

かくのごとくして θ 方向の速度分布 $\frac{\partial\,_0\phi_0}{\partial x}$ が求められる。

(4) 数値計算例：

$r_2/r_1=d_2/d_1=55\text{mm}/35\text{mm}$ なるときは

$A_3=1.809524,$

$A_4=2.248299+0.02721032/n^2,$

$A_5=3.829737+0.05360337/n^2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\frac{\partial\,_0\phi_0}{\partial x}=\sin\theta[(1-2x)][2\{x(1-x)\}+5.428572\{x(1-x)\}^2+9.102041\{x(1-x)\}^3+19.41670\{x(1-x)\}^4+\cdots\cdots]+\sin\theta/2\cdot[(1-2x)]\cdot[2\{x(1-x)\}+5.428572\{x(1-x)\}^2+9.020408\{x(1-x)\}^3+19.21569\{x(1-x)\}^4+\cdots\cdots]+\sin\theta/3\cdot[(1-2x)][2\{x(1-x)\}+5.428572\{x(1-x)\}^2+9.005291\{x(1-x)\}^3+19.17846\{x(1-x)\}^4+\cdots\cdots]+\sin\theta/4\cdot[(1-2x)][2\{x(1-x)\}+5.428572\{x(1-x)\}^2+9.0000006\{x(1-x)\}^3+19.16543\{x(1-x)\}^4+\cdots\cdots]+\sin\theta/5[(1-2x)][2\{x(1-x)\}+5.428572\{x(1-x)\}^2+8.997551\{x(1-x)\}^3+19.15940\{x(1-x)\}^4+\cdots\cdots]+\cdots\cdots\cdots\cdots$

これを図示すればFig. 2のごとくなる。

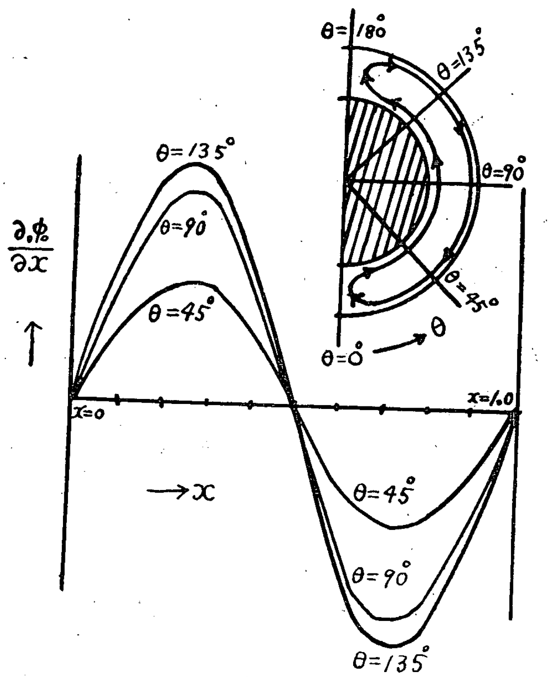

Fig. 2. 水平、二重管内の自由対流、無次元、速度分布 $\left(\frac{r_2}{r_1}=\frac{55\text{mm}}{35\text{mm}}\right)$

4. 結 言

密閉垂直の場合は係数決定に**多大な計算**を要した。しかし以上の方法で機械的に逐次に第一次近似、第二次近似、………と精度を上げることができる。終りに臨み御助言を賜つた松山英太郎博士に深甚の謝意を表す。

数値計算は倉重、坂口、斉藤、波佐間の諸君の労を多とす。なほ此の研究は文部省科学研究費の一部によるものである。