直線對の幾何學（第一報）[1]

谷　岡　源　二　郎

1. 直線対及び点対の座標

擬似平面に於て点及び直線の斉次座標を夫々

$(x)\equiv x_1 : x_2 : x_3,\quad (u)\equiv u_1 : u_2 : u_3$

とする。但し　$x_1=0$ を無限遠直線とする。

二直線 $(u^{(1)}), (u^{(2)})$ を対にとつて一つの要素と考え、その齊次座標として

(1) $X_{11} : X_{12} : X_{13} : X_{22} : X_{23} : X_{33} \equiv (X_{ij}),$

但し　$|X_{ij}|\equiv 0,\quad X_{ij}\equiv \dfrac{u_i^{(1)}u_j^{(2)}+u_i^{(2)}u_j^{(1)}}{2}$

を採用する。

同様に二点 $(x^{(1)}), (x^{(2)})$ に対する点対の齊次座標を次のように定める、

(2) $U_{11} : U_{12} : U_{13} : U_{22} : U_{23} : U_{33} \equiv (U_{ij}),$

但し　$|U_{ij}|\equiv 0,\quad U_{ij}\equiv \dfrac{x_i^{(1)}x_j^{(2)}+x_i^{(2)}x_j^{(1)}}{2}$

今擬似変換

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda x_1' = x_1, \\ \lambda x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad (i=2,3). \end{cases}$$

但し　λ は比例常数で、$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

或は

$$(4)\quad \begin{cases} \mu u_1 = u_1' + a_{21}u_2' + a_{31}u_3' \\ \mu u_2 = \quad a_{22}u_2' + a_{32}u_3' \\ \mu u_3 = \quad a_{23}u_2' + a_{33}u_3', \end{cases}$$

（但し μ は比例常数である。）

を考へると、直線対 (X_{ij}) は次のような変換を受ける

$$(5)\quad \begin{cases} \rho X_{11} = X_{11}' + 2a_{21}X_{12}' + 2a_{31}X_{13}' + 2a_{21}a_{31}X_{23}' + a_{21}^2X_{22}' + a_{31}^2X_{33}', \\ \rho X_{12} = a_{22}X_{12}' + a_{32}X_{13}' + (a_{21}a_{32}+a_{22}a_{31})X_{23}' + a_{21}a_{22}X_{22}' + a_{31}a_{32}X_{23}', \\ \rho X_{13} = a_{23}X_{12}' + a_{33}X_{13}' + (a_{21}a_{33}+a_{31}a_{23})X_{23}' + a_{21}a_{23}X_{22}' + a_{31}a_{33}X_{33}', \\ \rho X_{22} = 2a_{22}a_{32}X_{23}' + a_{22}^2X_{22}' + a_{32}^2X_{33}', \\ \rho X_{23} = (a_{22}a_{33}+a_{32}a_{23})X_{23}' + a_{22}a_{23}X_{22}' + a_{32}a_{33}X_{33}', \\ \rho X_{33} = 2a_{23}a_{33}X_{23}' + a_{23}^2X_{22}' + a_{33}^2X_{33}', \end{cases}$$

点対 (U_{ij}) も亦同様な変換を受ける。本論文の目的は、変換群（５）の基で不変な直線対を要素とした図形の性質を研究し、又点対に対しても同様なことを研究して、その結果を複素幾何学に応用することである。

2. 直線対と点対との関係

二直線 $(u^{(1)}), (u^{(2)})$ 及び $(v^{(1)}), (v^{(2)})$ からなる２つの直線対 $(X_{ij})(Y_{ij})$ の夫々の中心（対を構成している２直線の交点）を除き、４直線の４交点の中で同一直線上にない２点を対にとると、２つの点対が得られる。逆に同様にして２つの点対から２つの直線対が考へられる、今２つの直線対 $(X_{ij})(Y_{ij})$ に対応する２つの点対を $(U_{ij})(V_{ij})$ とすると、これらは次の関係式によつて結びつけられることがわかる。

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda X_{ii} = U_{jj}V_{kk} - 2U_{jk}V_{jk} + U_{kk}V_{jj} + 2\sqrt{V_{jk}^2 - V_{jj}V_{kk}}\sqrt{U_{ik}^2 - U_{jj}U_{kk}}, \\ \lambda X_{ij} = U_{jk}V_{ik} + U_{ik}V_{jk} - U_{kk}V_{ij} - U_{ij}V_{kk} - \sqrt{U_{jk}^2 - U_{jj}U_{kk}}\sqrt{V_{ik}^2 - V_{ii}V_{kk}} - \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii}U_{kk}} \\ \qquad \sqrt{V_{jk}^2 - V_{jj}V_{kk}}, \\ \lambda' Y_{ii} = U_{jj}V_{kk} - 2U_{jk}V_{jk} + U_{kk}V_{jj} - 2\sqrt{V_{jk}^2 - V_{jj}V_{kk}}\sqrt{U_{jk}^2 - U_{jj}U_{kk}}, \\ \lambda' Y_{ij} = U_{jk}V_{ik} + U_{ik}V_{jk} - U_{kk}V_{ij} - U_{ij}V_{kk} + \sqrt{U_{jk}^2 - U_{jj}U_{kk}}\sqrt{V_{ik}^2 - V_{ii}V_{kk}} + \sqrt{U_{ik}^2 - U_{ii}U_{kk}} \\ \qquad \sqrt{V_{jk}^2 - V_{jj}V_{kk}}, \end{cases}$$

（但し i, j, は 1, 2, 3を円環的にとるものとする。）

3. ２つの直線対又は点対から決定される拋物線

[1] 本論文は昭和24年10月25日、日本数学会京都例会幾何学分科会に於ける講演である。

点対を二級分解曲線と考えると、2つの点対によつて二級曲線束が決定される。この束に属する抛物線は唯一つであるが、これは2つの点対に対応する2つの直線対の構成4直線に接する唯一の抛物線である。2つの点対を (U_{ij}) (V_{ij}) とするとこれらから決定される抛物線の座標 (A_{ij}) は

$$(7)\quad \nu A_{ij}=\begin{vmatrix} U_{ij} & V_{ij} \\ U_{11} & V_{11} \end{vmatrix}$$

で與えられる。点対に対応する直線対の座標で表わすには (6) と同様にして導かれる (6) の逆關係式を (7) に代入すればよい。

次に抛物線 (A_{ij}) が直線対 (X_{ij}) の構成2直線の何れにも接する条件は

$$(8)\quad \begin{cases} (A_{33}\sqrt{X_{23}^2-X_{22}X_{33}}-2A_{13}\sqrt{X_{12}^2-X_{11}X_{22}})\,X_{33}=(A_{22}\sqrt{X_{23}^2-X_{22}X_{33}}+2A_{12}\sqrt{X_{13}^2-X_{11}X_{33}})X_{22} \\ (A_{23}\sqrt{X_{23}^2-X_{22}X_{33}}+A_{13}\sqrt{X_{13}^2-X_{11}X_{33}}-A_{12}\sqrt{X_{12}^2-X_{11}X_{22}})\,X_{22}=(A_{33}\sqrt{X_{23}^2-X_{22}X_{33}} \\ \qquad -2A_{13}\sqrt{X_{12}^2-X_{11}X_{22}})\,X_{23} \end{cases}$$

であることが容易に証明せられる。

又2つの点対を構成している4点を通る抛物線は2つあるが、これらは2つの点対に対応する2つの直線対を二次分解曲線と考えるときこれから決定される二次曲線束に含まれる丁度2つの抛物線である。從つて2つの直線対を (X_{ij}) (Y_{ij}) とすると、これらから決定される抛物線の方程式は

$$(9)\quad \sum_{i,j}^{1,2,3}(X_{ij}-\beta Y_{ij})x_ix_j=0,$$ である。

但し β は

$$(10)\quad (Y_{23}^2-Y_{22}Y_{33})\beta^2+(X_{22}Y_{33}+X_{33}Y_{22}-2X_{23}Y_{23})\beta+(X_{23}^2-X_{22}X_{33})=0$$

で與えられる。

4.　簡單な不変式

変換群 (5) に対して不変な式の中簡單なものを求めてみよう。

(i)　行列式 $|X_{ij}|$ は明らかに相対不変式であるから，$|X_{ij}|=0$ は不変式であり、この意味は明らかである。

(ii)　容易にわかるように

$$X_{23}^2-X_{22}X_{33}=\frac{1}{\rho_2}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}^2(X_{23}'^2-X_{22}'X_{33}')$$

であるから

$$(11)\quad \{X,X\}\equiv X_{23}^2-X_{22}X_{33}=0$$

は不変方程式である。

(iii)　(X_{ij}), (Y_{ij}) に対して

$$X_{23}Y_{23}-\frac{1}{2}X_{22}Y_{33}-\frac{1}{2}X_{33}Y_{22}$$
$$=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^2(X_{23}'Y_{23}'-\frac{1}{2}X_{22}'Y_{33}'-\frac{1}{2}X_{33}'Y_{22}')$$

となるから

$$(12)\quad \{X,Y\}\equiv X_{23}Y_{23}-\frac{1}{2}X_{22}Y_{33}-\frac{1}{2}X_{33}Y_{22}$$

は相対不変式である。

從つて

$$(13)\quad \frac{\{X,Y\}}{\sqrt{\{X,X\}}\ \sqrt{\{Y,Y\}}}$$

は絶対不変式である。

次に

$$(14)\quad \rho\xi_1\equiv 2\begin{vmatrix} X_{22} & X_{23} \\ Y_{22} & Y_{23} \end{vmatrix},\quad \rho\xi_2\equiv\begin{vmatrix} X_{22} & X_{33} \\ Y_{22} & Y_{33} \end{vmatrix},$$
$$\rho\xi_3\equiv\begin{vmatrix} X_{23} & X_{33} \\ Y_{23} & Y_{33} \end{vmatrix}$$

とおけば

$$\xi_2^2-\xi_1\xi_3=\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^4(\xi_2'^2-\xi_1'\xi_3')$$

となるから

$$(15)\quad (\xi,\xi)\equiv\xi_2^2-\xi_1\xi_3$$

は相対不変式である。

(iv)　2つの直線対 (X_{ij}), (Z_{ij}) に対して (14) と同様な式を、η_1, η_2, η_3 で表はせば (η,η) も (15) と同様な相対不変式である。又3つの直線対 (X_{ij}), (Y_{ij}), (Z_{ij}) に対して

$$\xi_2\eta_2-\frac{1}{2}\xi_1\eta_3-\frac{1}{2}\eta_1\xi_3=\frac{1}{\rho\rho}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^4(\xi_2'\eta_2'-\frac{1}{2}\xi_1'\eta_3'-\frac{1}{2}\eta_1'\xi_3')$$

が成立するから

(16)　$(\xi,\eta)\equiv\xi_2\eta_2-\frac{1}{2}\xi_1\eta_3-\frac{1}{2}\eta_1\xi_3$

もまた相対不変式である。従つて

(17)　$\dfrac{(\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi,\xi)}\sqrt{(\eta,\eta)}}$

は絶対不変式である。

5. 不変式の幾何学的意味 I

(i) 不変方程式(11)の意味

直線対 (X_{ij}) と無限遠直線との交点の座標は

$$X_{22}x_2^2+2X_{23}x_2x_3+X_{33}x_3^2=0$$

を満足するから、(X_{ij}) の中心が無限遠直線上にある条件が(11)となる。従つて(11)を満足するような直線対の集合は特別なものとなり、今後はこの集合に属しない直線対のみ考えていくことにする。

(ii) 不変式(13)の意味

これには数種の意味つけができる。

1°) 2つの直線対 $(X_{ij})(Y_{ij})$ から決定される二次曲線束に含まれる2つの拋物線を P_1, P_2 と名付け、$(X_{ij}), (Y_{ij}), P_1, P_2$ で作られる非調和比を j とすると

$$j=\frac{\beta_1}{\beta_2}$$

となる。但し β_1, β_2 は方程式(10)の二根である。今

$$d=\frac{1}{2i}\log j$$

とおけば

(18)　$J\equiv\cos d=(13)$

2°) 二級曲線束の一曲線 C_2 をとり C_2 の任意の一つの接線と束の4基線との交点の作る非調和比は C_2 の接線の取り方に無関係であるから今 C_2 として2つの直線対 $(X_{ij})(Y_{ij})$ から決定される拋物線をとり、その接線として無限遠直線をとることにする。この場合束の基線は $(X_{ij})(Y_{ij})$ を構成せる4直線であるから、これらと無限遠直線との交点を P, Q 及び R, S とすれば

$$k\equiv(R,P;Q,S)=\frac{1}{2}\frac{\{X,Y\}}{\sqrt{\{X,X\}}\sqrt{\{Y,Y\}}}+\frac{1}{2}$$

従つて

(19)　$J=2k-1$

3°) 上述の4点 P, Q 及び R, S は $(X_{ij}), (Y_{ij})$ が決定する二次曲線束に属する2拋物線が無限遠直線に接する点 M, N を二重点とする対合に於ける2組の対応点になつている。この対合の方程式は

$$(X_{22}x_2^2+2X_{23}x_2x_3+X_{33}x_3^2)$$
$$+\lambda(Y_{22}x_2^2+2Y_{23}x_2x_3+Y_{33}x_3^2)=0$$

である。二重点に応ずる λ の値は

$$\{Y,Y\}\lambda^2+2\{X,Y\}\lambda+\{X,X\}=0$$

を満足するから、それらの値を λ_1, λ_2 とすると

(20)　$J=\frac{1}{2i}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

4°) 2つの直線対 $(X_{ij})(Y_{ij})$ から決定される二次曲線束に属する2つの拋物線 P_1, P_2 の中の何れか1つ上の1点から束の4基点を投射して得られる4直線の作る非調和比は、射影の中心の取り方に無関係であるから、その拋物線の無限遠直線に接する点をとる。今 M, N の座標を

$(0:a_2:a_3)$,　$(0:b_2:b_3)$

とすると

$$\frac{a_2}{a_3}=-\frac{X_{23}-\beta_1Y_{23}}{X_{22}-\beta_1Y_{22}},\quad \frac{b_2}{b_3}=-\frac{X_{23}-\beta_2Y_{24}}{X_{22}-\beta_2Y_{22}},$$

但し β_1, β_2 は(10)から求まる。

4つの基点を $A,(x^{(1)}), B(x^{(2)}), C(y^{(1)}), D(Y^{(2)})$ とすれば

$$k_1\equiv(MA,MB;MC,MD)$$
$$=\left(\frac{a_2x_3^{(1)}-a_3x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}},\frac{a_2x_3^{(2)}-a_3x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}}:\frac{a_2y_3^{(1)}-a_3y_2^{(1)}}{y_1^{(1)}},\frac{a_2y_3^{(2)}-a_3y_2^{(2)}}{y_1^{(2)}}\right)$$
$$=\alpha\cdot\frac{a^2\cdot X_{22}+2aX_{23}+X_{33}}{a^2Y_{22}+2aY_{23}+Y_{33}}\quad 但し\ a\equiv\frac{a_2}{a_3},$$

同様にして

$$k_2\equiv(NA,NB;NC,ND)$$
$$=\alpha\frac{b^2X_{22}+2bX_{23}+X_{33}}{b^2Y_{22}+2bY_{23}+Y_{33}}\quad 但し\ b\equiv\frac{b_2}{b_3}.$$

又 α は比例常数である。従つて

(21)　$K\equiv\frac{k_1}{k_2}=\frac{\beta_2}{\beta_1}=j$

5°) 2つの直線対が決定する拋物線とこれらの直線対を構成する4直線との接点を P', Q', R', S' とし、拋物線が無限遠直線と接する点を L とすると

$$I_1\equiv(LP',LQ';LR',LS')$$
$$=\frac{\{X,Y\}-\sqrt{\{X,X\}}\sqrt{\{Y,Y\}}}{\{X,Y\}+\sqrt{\{X,X\}}\sqrt{\{Y,Y\}}}.$$

從つて

(22) $\mathring{J} = \cos\left\{\frac{1}{2i}\log\frac{1}{I_1}\right\}$。

特別な場合として2つの直線対が1直線を共有するならば、明らかに $J=1$ $\therefore d=0$

逆に $d=0$ ならば $\sqrt{\{X,X\}\cdot\{Y.Y\}}=(X,Y)$ この場合には $LP'\equiv LR'$ 或は $LQ'\equiv LS'$ となるから2つの直線対は1直線を共有する。從つて $J=1$ は2つの直線対が一直線を共有するための必要充分條件である。

(iii) 不変式(17)意味。

3つ直線対 (X_{ij}), (Y_{ij}), (Z_{ij}) が與えられたとする。(X_{ij}), (Y_{ij}) が無限遠直線上で決定する対合を I, (X_{ij}) (Z_{ij}) が決定する対合を I' とすると、

$I\circ I'\equiv H$ は1つの対応であるこの乘数を m とし

$$\delta\equiv\frac{1}{2i}\log m$$

とおけば

(23) $$\cos\delta=\frac{(\xi,\eta)}{\sqrt{(\xi,\xi)}\sqrt{(\eta,\eta)}}$$

となる。

6. 不変式の幾何学的意味 II
(非ユーグリツト幾何学的解訳)

(i) 不変式(13)の意味

射影平面上で二次曲線 C_2 の接線 l と1直線 l' とを考える。l' と C_2 との交点 P, Q に於ける C_2 えの接線が l と交はる点を M, N とし l' 上の任意の一点 A から C_2 に引いた接線が l と交る点を A_1, A_2 とすると A_1, A_2 は l 上で M, N を二重点とする対合 I の対応点である。これを利用する。今 l を無限遠直線、A, B を夫々中心とする2つの直線対から決定される拋物線を C_2 とする。然らば対合 I は2つの直線対が無限遠直線と交る点を夫々対応点とする対合であつて、2つの直線対の中心を結ぶ直線が拋物線と交る2点から拋物線を引いた接線と無限遠直線との交点を二重点に持つ。又直線 AB 上の任意の点から拋物線え引いた接線が無限遠直線と交る点は対合 I の対応点である。

上と逆に1つの拋物線を媒介として、無限遠直線上の点対を平面上の1点で表現することが出来る。即ち無限遠直線 l_∞ 上の点対 A_1, A_2 から拋物線え接線を引き、それらの交点 A を作り、A が点対 A_1, A_2 を表現するものとする。これによると、1つの対合の対応点を表わす点は1直線上にあることになる。

以上の考察を利用して不変式 J の非ユーグリツト的意味付けをなす。

拋物線として

(24) $x_2^2-x_1x_3=0$, (或は $u_2^2-4u_1u_3=0$),

をとる。(X_{ij}), (Y_{ij}) と l_∞ との交点を夫々 P_1, P_2 及び Q_1, Q_2 とし、点対 P_1, P_2 及び $Q_1 Q_2$ を表現する点を P 及び Q とすれば、それらの座標は夫々

$(4X_{33}:-2X_{23}:X_{22})$, $(4Y_{33}:-2Y_{23}:Y_{22})$

である。今(24)を絶対形とする非ユーグリツト幾何学を考え、2点 P, Q の距離の測度をとると

$$\frac{\{X,Y\}}{\sqrt{\{X,X\}}\sqrt{\{Y,Y\}}}$$

となる。

特別な場合として $J=1$ ならば2点 P, Q は同一の絶対接線上にあることとなる。

又2つの直線対 (X_{ij}), (Y_{ij}) の l_∞ との交点の中少なくとも2つが一致するならば、P, Q は一つの絶対接線上にあり、從つて $d=0$ となる。

更に (X_{ij}), (Y_{ij}) に応ずる d を d_1, (Y_{ij}), (Z_{ij}) に応ずる d を d_2, (Z_{ij}), (X_{ij}) に応ずる d を d_3 とするとき、夫々を表現する3点 P, Q, R が同一直線上にあるならば明らかに

(25) $\cos d_3=\cos(d_1+d_2)$

が成立する。從つて (X_{ij}), (Y_{ij}), (Z_{ij}) の l_∞ と交る3つの点対が同一の対合に属するならば(25)が成立する。

(ii) 不変式(17)の意味

上述と同様に考えていく。

3つの直線対 (X_{ij}), (Y_{ij}), (Z_{ij}) から決定される3点を夫々 P, Q, R とする。それらの座標は夫々

$(4X_{33}:-2X_{23}:X_{22})$,
$(4Y_{33}:-2Y_{23}:Z_{22})$,
$(4Z_{33}:-2Z_{23}:Z_{22})$,

で與えられる。

從つて直線 PQ 及び PR の線座標は夫々

$(\xi_1:4\xi_2:4\xi_3)$
$(\eta_1:4\eta_2:4\eta_3)$

である。然らば2直線 PQ, PR の非ユーグリツト幾何学に於ける角の餘弦は丁度不変式(17)となる。

以上(i)(ii)を総括すると、二次曲線(拋物線)(24)を絶対形に持つ非ユーグリツト幾何学に於ける距離と角とは丁度不変式(13)と(17)であたえられることになるから これらの2つの絶対不変式に関する限り上記の非ユーグリツト幾何学を考えていくことができる。從つて2つ或は3つの直線対の間の種々の関係を、非ユーグリツト平面上で考えていける。

(昭和25年4月29日)