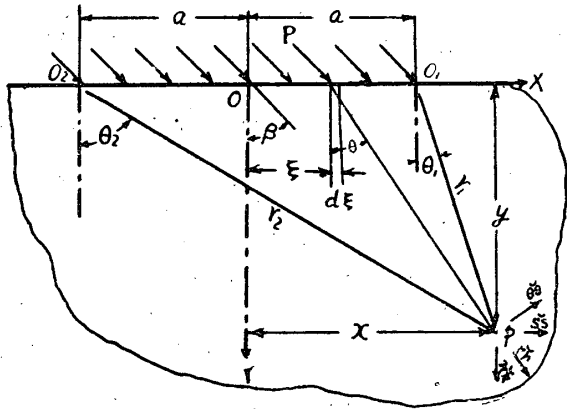


半無限平板の縁の一部分に傾斜均一分布荷重の存在する場合の応用式並に応力分布

大野元明

1. 緒言

二次元弾性理論において第1図に示す様な半無限平板の縁の一部に斜に荷重の分布する場合に板内に生ずる応力は縁に垂直と平行分力に基づく応力を合成して得られることはすでにFROCHTの著書⁽¹⁾にも説明されて居りそしてこれ等の応力等式も極座標にて与へられている。又特に垂直荷重に対しては従来極座標⁽²⁾、直角座標⁽³⁾又は双極座標⁽⁴⁾が適用され諸種の文献に記



第1図

されている。従つて本文においては上記以外に傾斜荷重の場合に双極座標を適用すること縁上及び板内の応力分布を数値的に検討することに主眼をおいた。尚ほ説明の便宜上他の文献と若干重複する点もあり且つ煩雑な途中の誘導式も省略しておく。

2. 応力の算式

(1) 極座標

第1図に示す如き半無限平板の縁の分布荷重に対しAiryの応力函数は

$$\chi = -\frac{P}{\pi} \int_{-a}^{+a} r \theta \cos(\theta - \beta) d\xi \quad (5)$$

にて与へられ、これは次の二つの χ_1 、 χ_2 の和になる。

$$\chi_1 = -\frac{P}{\pi} \cos \beta \int_{-a}^{+a} (x - \xi) \theta \cdot d\xi \quad (1)$$

$$\chi_2 = \frac{P}{\pi} \sin \beta \int_{-a}^{+a} \cos \theta \cdot r \theta d\xi \quad (2)$$

(1) は縁に垂直の成分、(2) は縁に沿う剪断荷重による応力函数である。夫々積分を行へば

$$\chi_1 = \frac{P \cos \beta}{2\pi} \left[r^2 \theta \right]_{-a}^{+a} \quad (1)'$$

$$\chi_2 = -\frac{P \sin \beta}{\pi} r^2 \left[\cos^2 \theta \cdot (\theta \tan \theta + \log \cos \theta) \right]_{-a}^{+a} \quad (2)'$$

これよりr方向及びこれに垂直方向の引張(又は圧縮)応力と剪断応力は積分に関係のない項を省いて θ_1 、 θ_2 を図の如く測ると傾斜角 β の場合には

$$\left. \begin{aligned} \overline{rr} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = \frac{P}{\pi} \left[\theta \cos \beta + (\theta \sin 2\theta - 2 \sin^2 \theta \cdot \log \cos \theta) \sin \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \frac{P}{\pi} \left[\theta \cos \beta - (\theta \sin 2\theta + 2 \cos^2 \theta \cdot \log \cos \theta) \sin \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \frac{P}{\pi} \left[\theta - \sin 2\theta (\theta \tan \theta + \log \cos \theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これを縁に垂直及び平行方向に回転して夫々の応力 \overline{nn} 、 \overline{ss} 、及び \overline{ns} で示せば

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} &= \left[\overline{rr} \cos^2 \theta + \overline{\theta\theta} \sin^2 \theta - \overline{r\theta} \sin 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ss} &= \left[\overline{rr} \sin^2 \theta + \overline{\theta\theta} \cos^2 \theta + \overline{r\theta} \sin 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ns} &= \left[\frac{1}{2} \overline{\theta\theta} - \overline{rr} \sin 2\theta + \overline{r\theta} \cos 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。(3)を(4)に入れると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} &= \frac{P}{\pi} \left[\left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \cos \beta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \cdot \sin \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ss} &= \frac{P}{\pi} \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \cos \beta - \left(2 \log \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \sin \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ns} &= \frac{P}{\pi} \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \sin \beta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \cdot \cos \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} + \overline{ss} &= \left[\overline{rr} + \overline{\theta\theta} \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{P}{\pi} \left[2\theta \cos \beta - 2 \sin \beta \cdot \log \cos \theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{nn} - \overline{ss} &= \frac{P}{\pi} \left[\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \sin \beta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \cdot \cos \beta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (5)'$$

(5) 及び (5)' は次の様に記しておくとも解り易い。

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} &= \left[\overline{nn} \right]_{\pi/2} \cdot \sin \beta + \left[\overline{nn} \right]_0 \cos \beta \\ \overline{ss} &= \left[\overline{ss} \right]_{\pi/2} \cdot \sin \beta + \left[\overline{ss} \right]_0 \cos \beta \\ \overline{ns} &= \left[\overline{ns} \right]_{\pi/2} \cdot \sin \beta + \left[\overline{ns} \right]_0 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\overline{nn} - \overline{ss} = \left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_{\pi/2} \cdot \sin \beta + \left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_0 \cos \beta \quad (6)'$$

よつて主応力の方向と \overline{nn} の方向のなす角 φ は

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \left\{ \left[\overline{ns} \right]_{\pi/2} \sin \beta + \left[\overline{ns} \right]_0 \cos \beta \right\}}{\left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_{\pi/2} \sin \beta + \left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_0 \cos \beta} \quad (7)$$

で与へられ、最大剪断応力線 (等色線) の分布は

$$\sqrt{\left(\overline{nn} - \overline{ss} \right)^2 + 4 \overline{ns}^2} = C \quad \text{但し } C = \text{媒介数} \quad (8)$$

となる。上記の $\left[\overline{nn} \right]_0$ $\left[\overline{nn} \right]_{\pi/2}$ は夫々 $\beta=0$ 及び $\beta=\pi/2$ のときの値であつて

$$\left. \begin{aligned} \left[\overline{nn} \right]_0 &= \frac{P}{\pi} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{P}{\pi} \left[\theta_1 - \theta_2 + \cos (\theta_1 + \theta_2) \sin (\theta_1 - \theta_2) \right] \\ \left[\overline{ss} \right]_0 &= \frac{P}{\pi} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{P}{\pi} \left[\theta_1 - \theta_2 - \cos (\theta_1 + \theta_2) \sin (\theta_1 - \theta_2) \right] \\ \left[\overline{ns} \right]_0 &= \frac{-P}{2\pi} \left[\cos 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{P}{\pi} \sin (\theta_1 + \theta_2) \sin (\theta_1 - \theta_2) \\ \left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_0 &= \frac{2P}{\pi} \cos (\theta_1 + \theta_2) \sin (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\tan 2\varphi = \tan (\theta_1 + \theta_2) \therefore \varphi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \text{ 又は } \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\sqrt{\left(\overline{nn} - \overline{ss} \right)_0^2 + 4 \left[\overline{ns} \right]_0^2} = \frac{2P}{\pi} \sin (\theta_1 - \theta_2)$$

よつて第2図の角 $O_1 P O_2$ を二等分する方向とこれに直角の方向に主応力方向が存在し、等色線は O_1 、 O_2 を過る円弧群となることは言うまでもない。又

$$\left. \begin{aligned} \left[\overline{nn} \right]_{\pi/2} &= \frac{P}{\pi} \left[-\cos 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = -\frac{P}{2\pi} \left[\cos 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \left[\overline{ns} \right]_0 \\ \left[\overline{ss} \right]_{\pi/2} &= \frac{P}{\pi} \left[-\sin^2 \theta - 2 \log \cos \theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \left[\overline{ns} \right]_{\pi/2} &= \frac{P}{\pi} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} = \left[\overline{ss} \right]_0 \\ \left[\overline{nn} - \overline{ss} \right]_{\pi/2} &= \frac{P}{\pi} \left[2 \log \cos \theta - \cos 2\theta \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これ等から特に $\beta = \pi/4$ に対する応力を示すと

$$\left. \begin{aligned} \overline{nn} &= \frac{P}{\pi\sqrt{2}} \left[\theta + \frac{1}{2} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ss} &= \frac{P}{\pi\sqrt{2}} \left[\theta - 2 \log \cos \theta - \frac{1}{2} (\sin 2\theta - \cos 2\theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \overline{ns} &= \frac{P}{\pi\sqrt{2}} \left[\theta - \frac{1}{2} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1} \\ \tan 2\varphi &= \frac{\left[2\theta - \frac{1}{2} (\sin 2\theta + \cos 2\theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1}}{\left[2 \log \cos \theta + (\sin 2\theta - \cos 2\theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。尚ほ (9), (10) より

$$\left[\overline{ss} \right]_0 = \left[\overline{ns} \right]_{\pi/2} \quad \text{及び} \quad \left[\overline{nn} \right]_{\pi/2} = \left[\overline{ns} \right]_0$$

の関係がある。

(2) 双極座標⁽⁶⁾

双極座標についての詳しい記述を省き必要事項のみを簡単に記しておく。第2図において

$$Z = x + iy = -a \coth \frac{1}{2} (\xi + i\eta) \quad (12)$$

の変換を行う。これより

$$\xi + i\eta = \log \frac{Z-a}{Z+a} \quad (12)'$$

$Z-a = r_1 e^{i\theta_1}$, $Z+a = r_2 e^{i\theta_2}$ とおく、但し θ は負。

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (x-a)^2 + y^2 = 2a^2 (\cosh \xi + \sinh \xi) / (\cosh \xi - \cos \eta) \\ r_2^2 &= (x+a)^2 + y^2 = 2a^2 (\cosh \xi - \sinh \xi) / (\cosh \xi - \cos \eta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

によつて $r_1 r_2$ を消去して

$$J = \frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (16)$$

となる。次に (12)' より

$$z^2 - a^2 = 4a^2 / (e^{\xi+i\eta} - 1)^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -\frac{\sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (18)$$

となる。次にこの双極座標における応力等式は G. B. JEFFERY により次の如く与へられている。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\xi &= \left\{ (\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \sinh \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \eta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \cosh \xi \right\} (\pi/J) \\ a\sigma_\eta &= \left\{ (\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \sinh \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin \eta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \cos \eta \right\} (\pi/J) \\ a\tau_{\xi\eta} &= -(\cosh \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (\pi/J) \end{aligned} \right\} \quad (19)^{(7)}$$

この応力方向は第2図の如く、 ξ, η 点を過る二つの直交円たる ξ 円、 η 円の切線方向であつて夫々負より正に向う。

$$\xi + i\eta = \log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\text{よつて } \xi = \log \frac{r_1}{r_2}, \quad \eta = \theta_1 - \theta_2 \quad (13)$$

が得られ、 ξ = 一定はアポロニウス円、 η = 一定は弦角 $\theta_1 - \theta_2$ = 一定を張る円弧で示される。

(12)' より x, y を算出すると

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \\ y &= \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \end{aligned} \right\} \quad (13)'$$

となり、次に写像縮少率を J とすると

$$J e^{i\phi} = \frac{d(x+iy)}{d(\xi+i\eta)} = \frac{z^2 - a^2}{2a} = \frac{r_1 r_2}{2a} e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

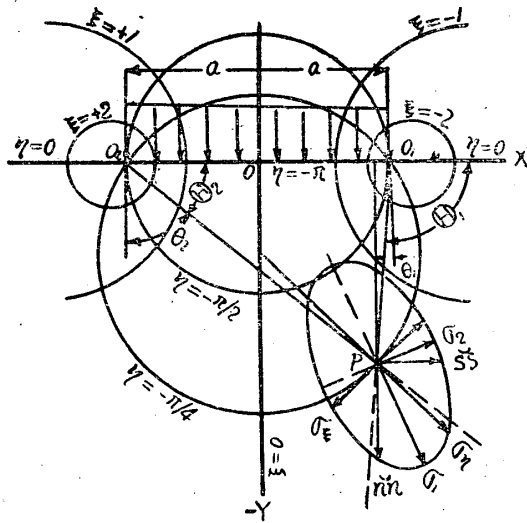
$$\text{即ち } J = \frac{r_1 r_2}{2a}, \quad \phi = \theta_1 + \theta_2 \quad (14)$$

で示され、これは更に

が得られるから、これと (14) から

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi &= \frac{J}{a} (\cosh \xi \cdot \cos \eta - 1) \\ \sin \phi &= \frac{J}{a} (-\sinh \xi \cdot \sin \eta) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

又、(17) より



第 2 図

次に (19) にて応力計等を行うには x_1, x_2 を夫々双極座標に書きかへ次の如く求める。

(a) $\beta = 0$

荷重が縁に垂直の場合で既に他の文献⁽⁴⁾に記述されているので結果のみを示しておく、(1)より

$$x_1 / J = \frac{Pa}{\pi} [+\phi' \sin \xi + \eta \cosh \xi] \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \phi' &= \theta_1 + \theta_2 + \pi = \phi + \pi \\ \eta &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{P}{\pi} y [(\theta_1 - \theta_2)x - a \{ \pi + (\theta_1 + \theta_2) \} - y \xi] \quad (22)$$

今 $\eta = \theta_1 - \theta_2$ $\phi' = \pi + \theta_1 + \theta_2 = \pi + \phi$ (22)'

とおき (13)'' の x, y 但し y は負及び (16) の J を導入して

$$x_2 / J = -\frac{P}{\pi} \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} [\eta \sinh \xi - \xi \sin \eta + \phi' (\cosh \xi - \cos \eta)] \quad (23)$$

(23) を (19) に適用して微分計算を行う場合甚だ煩雑となるが結局次の結果に到達する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{P}{\pi} [2\xi \cos^2 \phi - \eta \sin 2\phi - \sin \phi \cdot \sin \eta] \\ \sigma_\eta &= \frac{P}{\pi} [2\xi \sin^2 \phi + \eta \sin 2\phi + \sin \phi \cdot \sin \eta] \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{P}{\pi} [\xi \sin 2\phi + \eta \cos 2\phi + \cos \phi \cdot \sin \eta] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

又、これより

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \frac{2P}{\pi} \xi$$

$$\sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 2\sin \eta (\xi \sin \phi + \eta \cos \phi)} \quad (24)'$$

が得られる。

(c) $\beta = \pi/4$

が誘導され、(19) を計算して ξ, η の方向の応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{P}{\pi} [\eta + \sin \eta \cdot \cos \phi] \\ \sigma_\eta &= \frac{P}{\pi} [\eta - \sin \eta \cdot \cos \phi] \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{P}{\pi} \sin \eta \cdot \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。(21) を極座標式 (9) と対照するためには上記の θ_1, θ_2 と θ_1, θ_2 との関係

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + \theta_2 - \pi \end{aligned} \right\} \quad (21)'$$

を用ひて

$$\left. \begin{aligned} [\widetilde{nn}]_0 &= \frac{P}{\pi} [\eta - \sin \eta \cdot \cos \phi] = \sigma_\eta \\ [\widetilde{ss}]_0 &= \frac{P}{\pi} [\eta + \sin \eta \cdot \cos \phi] = \sigma_\xi \\ [\widetilde{ns}]_0 &= -\frac{P}{\pi} \sin \eta \cdot \sin \phi = \tau_{\xi\eta} \end{aligned} \right\} \quad (21)''$$

となり第 3 図の楕円の主軸に対して対称的なベクトルで示される関係がある。

(b) $\beta = \pi/2$

(2)' より

$$\eta_2 = -\frac{P}{\pi} \left[y^2 (\theta \tan \theta + \log \cos \theta) \right]_{\theta_2}^{\theta_1}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi} &= \frac{P}{\pi\sqrt{2}} [2\xi\cos^2\phi + \eta(1 - \sin 2\phi) - \sin\eta(\sin\phi - \cos\phi)] \\
 \sigma_{\eta} &= \frac{P}{\pi\sqrt{2}} [2\xi\sin^2\phi + \eta(1 + \sin 2\phi) + \sin\eta(\sin\phi - \cos\phi)] \\
 \tau_{\xi\eta} &= -\frac{P}{\pi\sqrt{2}} [\xi\sin 2\phi + \eta\cos 2\phi + \sin\eta(\sin\phi - \cos\phi)] \\
 \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} &= \frac{\sqrt{2}P}{\pi} [\xi + \eta] \\
 \sqrt{(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2} &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \sin^2\eta(\cos\phi - \sin\phi)^2 - 2(\xi + \eta)\sin\eta(\cos\phi - \sin\phi)(\cos 2\phi - \sin 2\phi)}
 \end{aligned} \tag{25}$$

3 中央軸 (Y軸) 上並に縁上の応力分布

上記の双極座標及び極座標にての応力等式によつてy軸及びx軸上の応力の値について吟味して見る。

(a) $\beta = 0$ の場合

(i) 中央軸上 $\xi = 0 \quad \phi = -\pi \quad \theta_1 + \theta_2 = 0$

$$\sigma_{\xi} = \frac{P}{\pi} [\eta - \sin\eta] \quad \sigma_{\eta} = \frac{P}{\pi} [\eta + \sin\eta] \quad \tau_{\xi\eta} = 0$$

$$[\bar{s}s]_0 = \frac{P}{\pi} [\eta - \sin\eta] \quad [\bar{n}n]_0 = \frac{P}{\pi} [\eta + \sin\eta] \quad [\bar{n}s]_0 = 0$$

(ii) 自由縁 (荷重無き部分) $\eta = 0 \quad \phi = 0 \quad \theta_1 - \theta_2 = 0$ (右側)

$\eta = 0 \quad \phi = -2\pi \quad \theta_1 - \theta_2 = 0$ (左側)

$$\sigma_{\xi} = 0, \quad \sigma_{\eta} = 0 \quad \tau_{\xi\eta} = 0 \quad [\bar{s}s]_0 = 0 \quad [\bar{n}n]_0 = 0 \quad [\bar{n}s]_0 = 0$$

(iii) 受圧縁 (0_1 と 0_2 の間) $\eta = -\pi \quad \phi = -\pi \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$
 $\theta_1 = +\pi/2$

$$\sigma_{\xi} = -P \quad \tau_{\eta} = -P \quad \sigma_{\xi\eta} = 0$$

$$[\bar{s}s]_0 = -P \quad [\bar{n}n]_0 = -P \quad [\bar{n}s]_0 = 0$$

(iv) 0_1 及び 0_2 点 $\phi = -\pi/2 \quad \mu = -\pi/2$

及び $\phi = -\frac{3}{2}\pi \quad \eta = -\pi/2$

$$\sigma_{\xi} = -P/2 \quad \sigma_{\eta} = -P/2 \quad \tau_{\xi\eta} = -P/2$$

$$[\bar{n}n]_0 = -P/2 \quad [\bar{s}s]_0 = -P/2 \quad [\bar{n}s]_0 = -P/2$$

となり、 $0_1, 0_2$ 点は不連続となる。

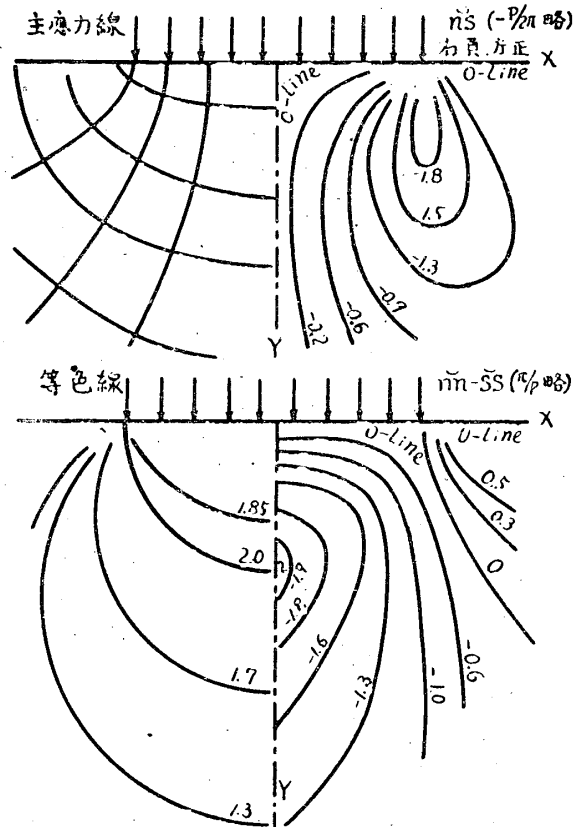
尚ほ $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}$ の方向が $\bar{n}n, \bar{s}s$ の方向と一致する位置では $\phi = -\pi/2$ 或は $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ であつて、このときの応力は次の様になる。

$$\sigma_{\xi} = \frac{P}{\pi}\eta \quad \sigma_{\eta} = \frac{P}{\pi}\eta \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{P}{\pi}\sin\eta$$

$$[\bar{n}n]_0 = \frac{P}{\pi}\eta \quad [\bar{s}s]_0 = \frac{P}{\pi}\eta \quad [\bar{n}s]_0 = \frac{P}{\pi}\sin\eta$$

(b) $\beta = \pi/2$ の場合

(i) 中央軸上



第 3 図

$$\sigma_{\xi} = \overline{ss} = \sigma_{\eta} = \overline{nn} = 0 \quad \tau_{\xi\eta} = -\frac{P}{\pi}[\eta - \sin\eta] = -ns$$

(ii) 自由縁

$$\sigma_{\xi} = \overline{ss} = \frac{P}{\pi}[2\xi] \quad \sigma_{\eta} = \overline{nn} = 0 \quad \tau_{\xi\eta} = -\frac{P}{\pi}[\eta]$$

(iii) 受圧縁

$$\sigma_{\xi} = \overline{ss} = \frac{P}{\pi}[2\xi] \quad \sigma_{\eta} = \overline{nn} = 0 \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{P}{\pi}$$

(iv) 0_1 及び 0_2 点

$$\sigma_{\xi} = \overline{nn} = -\frac{P}{\pi} \quad \sigma_{\eta} = \overline{ss} = \frac{P}{\pi}[2\xi + 1] = \pm \infty$$

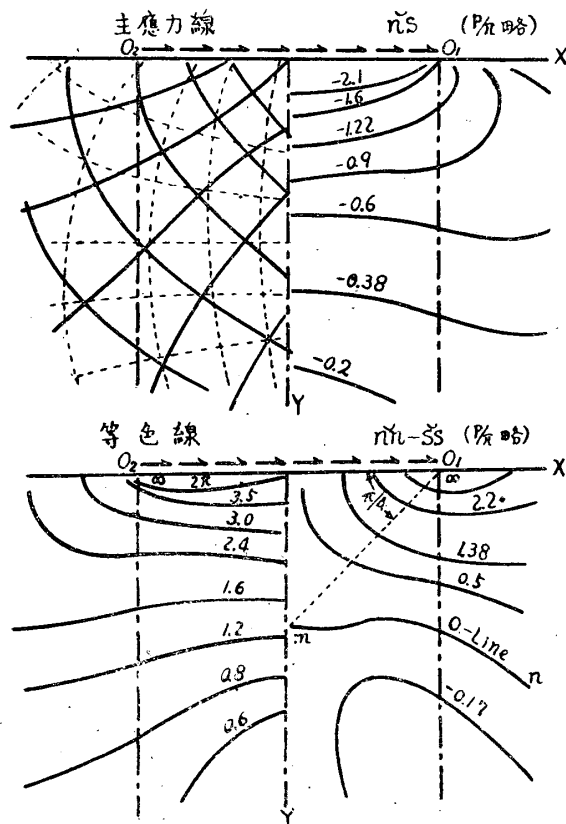
$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{P}{2} = ns$$

又、 σ_{ξ} 、 σ_{η} の方向と \overline{nn} 、 \overline{ss} の方向が一致する位置では (a) の場合と同様にして

$$\sigma_{\xi} = \overline{nn} = \frac{P}{\pi} \sin\eta, \quad \sigma_{\eta} = \overline{ss} = \frac{P}{\pi}[2\xi - \sin\eta],$$

$$\tau_{\xi\eta} = \overline{ns} = \frac{P}{\pi} \eta$$

となる。



第 4 図

0_1 及び 0_2 の不連続性は第 4 図を見れば解かる。図において \overline{ns} の値は 0_1 と 0_2 との間では $-\pi$

($\frac{P}{\pi}$ を略してあるから実際は $-P$) で 0_1 点では $-\pi/2$ (実際は $-P/2$) で自由縁は零である。

又図の $\overline{nn}-\overline{ss}$ 線図では 0_1 点は ∞ で圧力縁では中央で 2π になる様に漸減する、自由縁でも同様に漸減し不連続ではない。

(c) $\beta = \pi/4$ の場合

(a) 及び (b) の合成となる。(25) 及び (11) から得られる。第 5 図の \overline{nn} は 0_1 、 0_2 にて不連続第 6 図の \overline{ns} も同様である。

4. 板内の應用分布

β の値 $0, \pi/2, \pi/4$ に対する \overline{nn} 、 \overline{ss} 、 \overline{ns} 等を求め主応力の方向及び等色線の分布状況を調べると次の様になる。

(a) $\beta = 0$ の場合

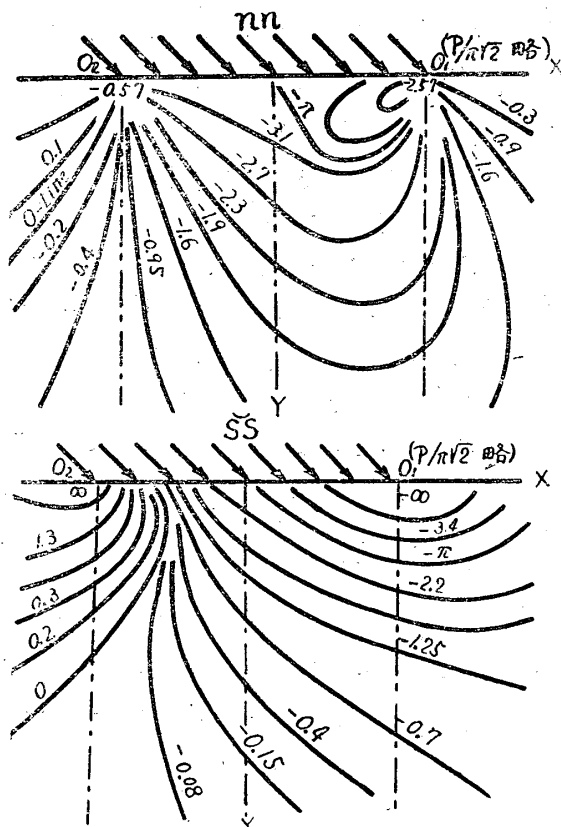
主応力の方向、等色線は夫々楕円及び円弧(第 3 図)になることは周知の通りである。 $\overline{nn}-\overline{ss}$ 線図は y 軸について対称で、これが零になる線は (21)' から $\cos\phi = 0$ 即ち $\theta_1 + \theta_2 = -\pi/2$ で与えられる。 y 軸上にその最大値 $2P/\pi$ が存在する。この点は $\eta = -\pi/2$ 円弧との交点である。 \overline{ns} は 0_1 に集中する図示の曲線となり、 y 軸について図形は対称で符号が異なる。この 0_1 、 0_2 点は不連続点である。

(b) $\beta = \pi/2$ の場合

第 4 図に示す如く \overline{ns} の分布は 0_2 (又は 0_1) を不連続点としてこれに向つて集中するが縁から遠ざかるにつれてその形は図の様に変化する。 $\overline{nn}-\overline{ss} = 0$ の線 \overline{nn} は (10) より算出され、 m 点は $\eta = -\pi/2$ と y 軸の交点である。主応力線、等色線は図示の如くなり無限遠に到る程縁の一点に剪断荷重の存在する場合の形と近似してくる。第 4 図上の点線は最大剪断応力の方向を示す。

(c) $\beta = \pi/4$ の場合

第 5 図は \overline{nn} 及び \overline{ss} の分布で、 $\overline{nn} = 0$ は 0_2 から始まる mn 線、 $\overline{ss} = 0$ は $0_1, 0_2$ 間の縁上にて $r_1/r_2 = 4.8$ から始まる mn 線で両者共これを境にして引張と圧縮に分れる。第 6 図の $\overline{ns} = 0$ の線は第 8 図に示す如く $\theta_1 = -55^\circ$ 、 $\theta_2 = -30^\circ$ 附近で $\overline{nn} = 0$ 、 $\overline{ss} = 0$ の線と接近する、その交点は無限遠にあ



第 5 図

る。 $0_1, 0_2$ では \bar{nn} は不連続であるが \bar{ss} は連続、又 \bar{ns} は不連続である。第8図にはこの場合の $\bar{nn}, \bar{ss}, \bar{ns}$ の各零線の位置を、並に点線にて $\beta = \pi/2, \beta = 0$ の場合変移状況を比較図示した。主応力方向及び等色線は第7図の如く算出される。

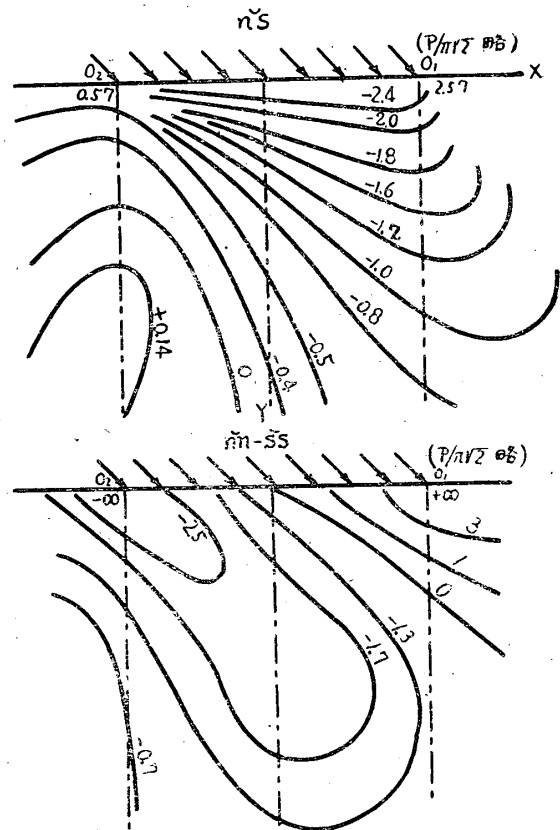
5. 結 言

上記各場合の等色線、主応力線、特異点等について数値的に比較検討した結果縁上及び板内の応力分布が可成り明瞭になつたと思う。尚ほこれ等は縁の近くの部分についてのみ示してあるが、縁を遠ざかるにつれて変遷してくる、即ち無限遠に到る程均一分布の幅の影響が少くなり荷重が一点に作用する場合の状態に近附くことは言うまでもない。(24), (25)式等は ξ, η, ϕ について対称的な形をもち、実用上重要な基礎式である。即ち垂直荷重の場合と同様に剪断荷重並に傾斜荷重に対しても双極座標が実用上便利であることが解かる。ただ応力の方向が

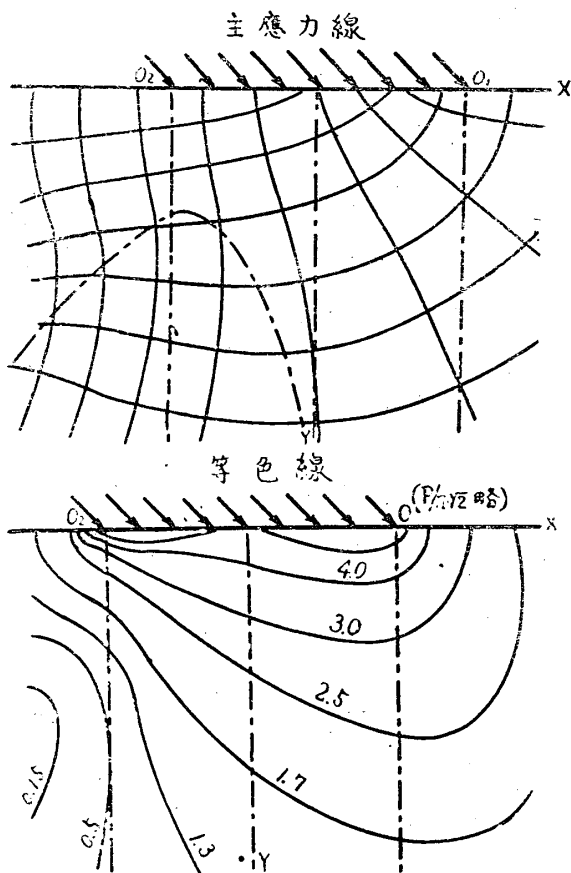
直角座標の様に一定しないので板内の応力分布は極座標を用いて算出した。又、本文では 45° の傾斜角の場合を示したが、この場合の引張、圧縮の限界線や等色線、主応力線等については興味があると思う。

参考文献

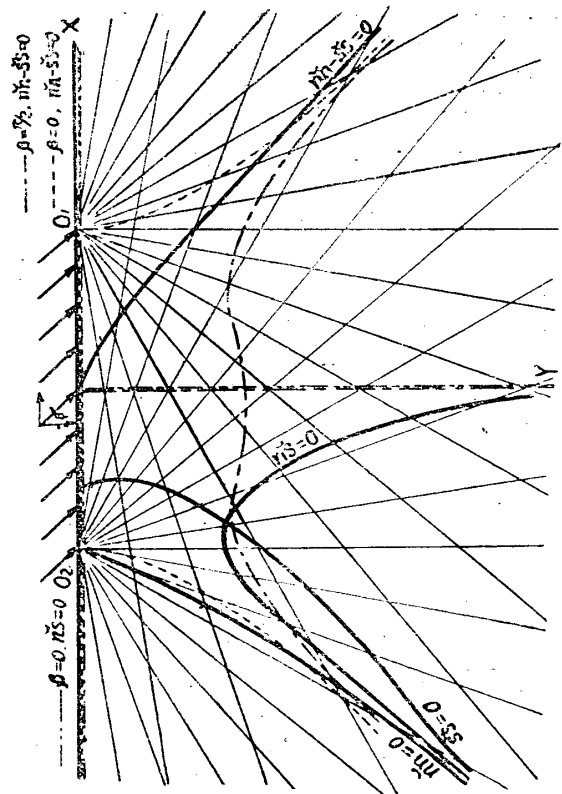
- (1) Frocht : Photoelasticity vol. II 1948
- (2) E.G. Koker, & L.N.G. Filon : Photoelasticity 1931
- (3) Stewart. Way :
- (4) 鶴戸口英善 : 応用力学 4巻24号 1951
- (5) (2)
- (6) 最上 武雄 : 二次元弾性理論 昭. 17
- (7) G. B. Teffery : Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. 1921



第 6 図



第 7 図



第 8 図

ウォームギヤの接触 (接触線の性質について)

磯 部 孝 一

1. 緒 言

歯車はほとんど強さの点よりも、摩耗の点で使用できなくなるものである。ことにウォーム傳動装置は、機構学上完全な滑り接触であるから、摩耗がはげしい。その主なる因子は、歯面の圧力、歯面の滑り、歯の材質、歯面の曲率、嚙合領域、給油の状態、および接触線の性質等であるが、特に接触線の性質は、給油の状態に関連して、重大な因子である。接触線の状態により、はるかに大きい傳動能力が得られることが唱えられている。⁽¹⁾

本論文は接触線を数値的に求める一般式を考

察し、これを用いてスクリーヘリコイド、およびインボリュートヘリコイドに普遍し、第一段階として、スクリーヘリコイドのウォームにつき、圧力角および進み角を変化した場合に接触線に及ぼす影響を解析したものである。

2. 接触線を求める式

接触線を求めるには二つの方法がある。その一つは、ウォーム歯車の軸に垂直な幾つかの面で、ウォーム嚙合を切断すれば、各断面はあたかもラックとピニオンの嚙合となるから、各断面における接触軌跡を求め、これを合成して求められる接触面と、ウォーム歯形との交点を求