LEWISの公式の使用に關する一二の考察

新　井　敏　正

歯車の強度計算に於けるLEWISの公式は餘りにも有名である。如何なる機械設計の本にも

$$F = KBP_c f_b$$

なる式と各種の標準歯車のLEWIS係数の表とが合理的な強度計算法の代表として載せられている。私も昭和十六年以来本校に於て機械設計を担当してこの式の恩恵に浴する所の多かつた者の一人であるが同時にこの儘の形では使用に不便を感ずる場合も時折あつて色々と考えさせられたものである。

その中で最も苦労したものが二つある。

(1)　一つは荷重を知つて歯数を求める場合である。若し歯数を知つて荷重を求めるのならば上式に於てK, B, P_c, f_bが総べて既知となるから簡単に計算する事ができる。所が逆に荷重が分つていて歯数を求める場合には歯数の函数であるKとP_cとが共に未知数となるので一寸厄介である。そこで止むを得ず適当な歯数を假定してP_cとKを求め、それが表中のKと一致する迄根気よく繰返す所謂「サグリ」の手を使うことになる。そこでこの逆算法を只一度で計算する方法を第一節に述べることにする。

(2)　もう一つは現場等でよくやられるのであるが、歯車そのものを示してこれで何馬力傳えられるかと聞かれることである。（勿論毎分回転数と材質は敎えてくれる）この場合当然一割や二割の誤差は問題にならず大体の見当さえつけばよいのだがそれが仲々大変である。と言つて「LEWIS係数の表がありませんから何れ後程。」では些か情ない。そこでLEWIS係数の表は勿論無しでできれば諳算要すれば計算尺を一寸使つてズバリと馬力を求める方法はないものだろうか。これを第二節に述べたいと思う。

1.　刻み円周荷重を知つて歯数を求むる方法

これにはまづKを歯数で割つたK_1の値及びK^1を更に歯数で割つたK_2の値を表に作つておくこの表はKの表から簡単に作る事ができる。節末に各標準歯車のK K_1 K_2の表を示す。

d ＝刻み円直径　cm
Z ＝歯数
P_c＝円刻み　cm
M＝モヂュール　cm（特にcmとする）
B＝歯幅　cm
n＝毎分回転数　rpm
v＝刻み円周速度 $^m/_{sec}$
H＝馬力　HP
F＝刻み円周荷重 kg
f_b＝許し曲げ応力 $^{kg}/_{cm^2}$　（運転）
K＝LEWIS 係数
K_1＝一次LEWIS 係数
K_2＝二次LEWIS 係数

この場合Bの與え方に二通りある。

その一つは直径との釣合を考えて寸法そのものが與えられる場合である。

$$F = KBP_c f_b = KB\pi M f_b$$
$$= KB\pi \frac{d}{Z} f_b = \frac{K}{Z}\pi B d f_b$$

$$\therefore\quad \frac{F}{\pi B d f_b} = K_1 \qquad (1)$$

左辺は悉く既知であるからK_1の値が求められる。従つて下表から直ちに歯数が決定される。

もう一つは歯形との釣合を考えて$B = CP_c$として與えられる場合である。（Cは定数）

$$F = KBP_c f_b = KCP_c^2 f_b$$
$$= KC\left(\frac{\pi d}{Z}\right)^2 f_b = \frac{K}{Z^2} C\pi^2 d^2 f_b$$

$$\therefore\quad \frac{F}{C\pi^2 d^2 f_b} = K_2 \qquad (2)$$

左辺は悉く既知であるからK_2の値が求められる。従つて下表から直ちに歯数が決定される。

第1表　$14\frac{1}{2}^\circ$標準齒

Z	K	K_1	K_2
12	0.067	0.00558	0.000465
13	0.071	0.00546	0.000420
14	0.075	0.00536	0.000383
15	0.078	0.00520	0.000347
16	0.081	0.00506	0.000316
17	0.084	0.00494	0.000291
18	0.086	0.00478	0.000265
19	0.088	0.00463	0.000244
20	0.090	0.00450	0.000225
21	0.092	0.00438	0.000209
23	0.094	0.00409	0.000178
25	0.097	0.00388	0.000155
27	0.099	0.00367	0.000136
30	0.101	0.00337	0.000112
34	0.104	0.00306	0.0000900
38	0.106	0.00279	0.0000734
43	0.108	0.00251	0.0000584
50	0.110	0.00220	0.0000440
60	0.113	0.00188	0.0000314
75	0.115	0.00153	0.0000204
100	0.117	0.00117	0.0000117
150	0.119	0.000793	0.00000529
300	0.122	0.000407	0.00000136
ラック	0.124	0.000000	0.00000000

第2表　20°　高　齒

Z	K	K_1	K_2
12	0.078	0.00650	0.000542
13	0.083	0.00638	0.000491
14	0.088	0.00629	0.000449
15	0.092	0.00613	0.000409
16	0.094	0.00588	0.000367
17	0.096	0.00565	0.000332
18	0.098	0.00544	0.000302
19	0.100	0.00526	0.000277
20	0.102	0.00510	0.000255
21	0.104	0.00495	0.000236
23	0.106	0.00461	0.000200
25	0.108	0.00432	0.000173
27	0.111	0.00411	0.000152
30	0.114	0.00380	0.000127
34	0.118	0.00347	0.000102
38	0.122	0.00321	0.0000845
43	0.126	0.00293	0.0000681
50	0.130	0.00260	0.0000520
60	0.134	0.00223	0.0000372
75	0.138	0.00184	0.0000245
100	0.142	0.00142	0.0000142
150	0.146	0.000973	0.00000649
300	0.150	0.000500	0.00000167
ラック	0.154	0.000000	0.00000000

第3表　20°　低　齒

Z	K	K_1	K_2
12	0.099	0.00825	0.000688
13	0.103	0.00792	0.000609
14	0.108	0.00771	0.000551
15	0.111	0.00740	0.000493
16	0.115	0.00719	0.000449
17	0.117	0.00688	0.000405
18	0.120	0.00667	0.000370
19	0.123	0.00647	0.000341
20	0.125	0.00625	0.000313
21	0.127	0.00605	0.000288
23	0.130	0.00565	0.000246
25	0.133	0.00532	0.000213
27	0.136	0.00504	0.000187
30	0.139	0.00463	0.000154
34	0.142	0.00418	0.000123
38	0.145	0.00382	0.000100
43	0.147	0.00342	0.0000795
50	0.151	0.00302	0.0000604
60	0.154	0.00257	0.0000428
75	0.158	0.00211	0.0000281
100	0.161	0.00161	0.0000161
150	0.165	0.00110	0.00000733
300	0.170	0.000567	0.00000189
ラック	0.175	0.000000	0.00000000

註 1：K の値は Zの増加と共に増加するがK_1及びK_2の値は Zの増加につれて減少する。

註 2：サグリによらないで齒数を直ちに求める方法としてはこの他

$$K = C_1 - \frac{C_2}{Z}$$

（C_1C_2は定数で例えば$14\frac{1}{2}°$標準歯では

$C_1=0.124$, $C_2=0.684$）

なる式を使う法等があるが上述の表を使う方法が最も簡便である。

2. 歯車の傳達馬力の簡便な求め方

実際の場合直接與えられるものは、刻み円直径・歯幅・モヂュール（これは歯数・円刻み・直径刻みとして與えられることもあるがいづれも簡單にモヂュールに換算することができる）毎分回転数・材料の靜止許し曲げ応力 f_b'(kg/cm²) である。

歯車の刻み円周速度は

$$v = \frac{\pi\ d\ n}{60 \times 100} \qquad \text{(a)}$$

歯の許し曲げ応力は最も一般の場合（中速度 v=5～20, 普通の機械仕上）として

$$f_b = \frac{6}{6+v} f b' \qquad \text{(b)}$$

歯の最大曲げ力は

$$F = KBP_cf_b = \pi KBMf_b$$

又

$$F = \frac{71620 \times 2}{dn} H$$

$$\therefore \quad H = \frac{\pi KBMdn}{71620 \times 2} f_b \qquad \text{(c)}$$

(a) (b) (c) 式より

$$H = 0.2513K(BM)\left(\frac{\pi dn}{36000+\pi dn}\right)f_b$$

こゝで諳算の便宜上100以上の値をとり得るものを100單位にして位取りを少くすると毎分回転数 n rpm は100 N rpm となり刻み円直径 d cmは Dm となり靜止許し曲げ応力 f_b'kg/cm² は$100F_b$kg/cm²となる。然るときは

$$H = 25.13K(BM)\left(\frac{DN}{1.146+DN}\right)F_b$$

この式の常数は複雑で諳記に不便である。

そこで$25.13\left(\frac{DN}{1.146+DN}\right)$の代りに$24\left(\frac{DN}{1+DN}\right)$をとれば

$$H = 24K(BM)\left(\frac{DN}{1+DN}\right)F_b \qquad (3)$$

なるスツキリした形を得る。しかもこの変換による誤差を求めて見ると下表の通りである。

第4表　(3)式の誤差

DN	A=25.13 $\left(\frac{DN}{1.146+DN}\right)$	B=24 $\left(\frac{DN}{1+DN}\right)$	B/A	誤差 %
0.2	3.73	4.00	1.07	+7
0.4	6.50	6.86	1.06	+6
0.6	8.64	9.00	1.04	+4
0.8	10.33	10.67	1.03	+3
1.0	11.71	12.00	1.02	+2
1.2	12.85	13.09	1.02	+2
1.4	13.82	14.00	1.01	+1
1.6	14.64	14.77	1.01	+1
1.8	15.35	15.43	1.01	+1
2.0	15.98	16.00	1.00	0
2.2	16.52	16.50	1.00	0
2.4	17.01	16.94	1.00	0
2.6	17.44	17.33	0.99	−1
2.8	17.83	17.68	0.99	−1
3.0	18.18	18.00	0.99	−1
3.2	18.50	18.29	0.99	−1
3.4	18.80	18.55	0.99	−1
3.6	19.06	18.78	0.99	−1
3.8	19.31	19.00	0.98	−2
4.0	19.53	19.20	0.98	−2
4.2	19.74	19.39	0.98	−2
4.4	19.94	19.56	0.98	−2
4.6	20.12	19.71	0.98	−2
4.8	20.29	19.86	0.98	−2
5.0	20.44	20.00	0.98	−2

(b)式は v=5～20 m/sec の場合即ちDN=1～4の場合に用うるものであるがこの範囲では最大誤差は僅かに±2％に過ぎず勿論無視して差支えない。

これよりDNの小なる範囲では誤差が危險側に稍ゝ大きくなるが低速度であるから中速度用としての値をそのまゝ使うより稍ゝ大きめこのの値の方がむしろ正当で、却つて(3)式の適用範囲を合理的に低速度迄拡張し得ることになる。

又これよりDNの大なる範囲では誤差は安全側でしかも僅少である。

從つて(3)式は誤差の考慮を全然必要としないで使用する事ができる。

次にKは歯数の函数であつて定数ではないが

今$14\frac{1}{2}°$標準歯に対してこれを0.1と定むれば更に簡便な(4)式が得られ歯数に応じて下表の如き誤差を生ずる。

$$H = 2.4\ (BM)\left(\frac{DN}{1+DN}\right)F_b \qquad (4)$$

第5表　歯数に依る(4)式の誤差

Z	K	誤差 ％ (約)	
13	0.071	+30	
15	0.078	+20	常用範囲
20	0.090	+10	常用範囲
30	0.101	0	常用範囲
50	0.110	−10	常用範囲
150	0.119	−20	常用範囲
ラツク	0.124	−25	

即ち30枚附近で誤差は殆ど無く、20〜50枚の範囲では±10％、15〜150枚の範囲（常用範囲）では±20％の誤差を生ずるが実用上は差支えない。若し更に精密を期する必要があれば15枚附近で2割減、20枚附近で1割減、50枚附近で1割増、150枚附近で2割増の修正を行えば誤差を数％以内にすることができる。

又20°高歯に対しては同様にしてK＝1.13と定めて(5)式が得られる。

$$H = 2.7\ (BM)\left(\frac{DN}{1+DN}\right)F_b \qquad (5)$$

又20°低歯に対しては同様にしてK＝0.138と定めて(6)式が得られる。

$$H = 3.3\ (BM)\left(\frac{DN}{1+DN}\right)F_b \qquad (6)$$

(5)(6)式の誤差も略ゝ(4)式に準じて修正を行うことができる。（実際は(4)式の場合より僅かに大きいが煩雑を避け記憶に便ならしむる為に同様な取扱をする）

即ち(4)(5)(6)の三式を記憶しその修正要領を一通り心得ておけば随時随所に活用する事ができるのである。

註1：(4)(5)(6)式では前述の通り

H＝馬力HP

D＝刻み円直径m（mなる事に注意）

N＝毎分回転数rpmを100で割つたもの

F_b＝静止許し曲げ応力 kg/cm^{2}を100で割つたもの

B＝歯幅cm

M＝モヂュールcm（cmなる事に注意）

を表しているから

DN＝0.1〜5程度　　F_b＝4〜38程度

B＝0.5〜20程度　　M＝0.1〜2程度

$\frac{DN}{1+DN}$＝0.1〜0.9程度

BM＝0.05〜40程度

で右辺には決して三桁の因数が現れないから計算（特に譜算）に便利である。従つて若し三桁の数字が出た時には位取りを誤つていないかを調べるべきである。

例題：鍛鋼第3種（$f_b'=1200^{kg}/_{cm^2}$）d＝30cm M＝5mm　B＝6cm の$14\frac{1}{2}°$標準歯車がある。

400rpmにて幾馬力を傳えるか。

解：(4)式より

$$H = 2.4\ (6\times0.5)\left(\frac{0.3\times4}{1+0.3\times4}\right)12$$

$$= 2.4\times3\times\frac{1.2}{2.2}\times12 = 47$$

歯数は60枚であるから1割増して

H＝47×1.1＝52HP