導関数の計量について

真　野　孝　義

導関数の計量について美麗な結果を導き得たので報告します。

定理 1 $f(x)$ は $[-a,\ +a]$ で連続な二次導関数をもつとし

$$M_0 = \mathrm{Max.}|f(x)| \qquad |x| \leqq a$$

$$M_2 = \mathrm{Max.}|f''(x)| \qquad |x| \leqq a$$

とするとき，$[-a,\ +a]$ の凡ての x の値に対して，

$$|f'(x)| < \frac{M_0}{a} + \frac{x^2+a^2}{2a} M_2$$

なり。

（証明）Taylor 定理により

$$(1)\quad f(a) - f(x) = (a-x)\cdot f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 \cdot f''(\xi_1) \qquad (-a < \xi_1 < a)$$

$$(2)\quad f(-a) - f(x) = (-a-x)\cdot f'(x) + \frac{1}{2}(-a-x)^2 \cdot f''(\xi_2) \qquad (-a < \xi_2 < a)$$

$$(1)\text{-}(2)\quad f(a) - f(-a) = 2af'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 \cdot f''(\xi_1) - \frac{1}{2}(-a-x)^2 \cdot f''(\xi_2)$$

絶対値をとると，

$$2a \cdot |f'(x)| \leqq |-f(a)| + |f(-a)| + \frac{1}{2}(a-x)^2 \cdot |f''(\xi_1)| + \frac{1}{2}(-a-x)^2 |-f''(\xi_2)|$$

$$\leqq M_0 + M_0 + \frac{1}{2}(a-x)^2 \cdot M_2 + \frac{1}{2}(-a-x)^2 \cdot M_2$$

$$= 2M_0 + \frac{1}{2}[(a-x)^2 + (-a-x)^2] M_2$$

$$= 2M_0 + (a^2 + x^2) \cdot M_2$$

両辺を $2a$ でわり

$$|f'(x)| < \frac{M_0}{a} + \frac{a^2+x^2}{2a} M_2$$

系 I

$|x| \leqq 1$ に対して

$|f(x)| \leqq 1$, $|f''(x)| \leqq 1$ のとき，

$|f'(x)| \leqq 2$ なり。

系 II

$f(x)$ は 2 回可微分で

$f'(x) > 1$ のとき，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \text{ なり。}$$

$\boxed{\text{系 III}}$

$f(x)$ は〔a, b〕で連続な2次導関数をもつとし

$$M_0=\mathrm{Max.}|f(x)| \qquad a<x<b$$
$$M_2=\mathrm{Max.}|f''(x)| \qquad a<x<b$$

とするとき，〔a, b〕の凡ての x の値に対して

$$|f'(x)|<\frac{2M_0}{b-a}+\frac{4x^2+(b-a)^2}{4(b-a)}M_2$$

なり。但し b は $b>3a$, $b<-a$ とする。

$\boxed{\text{定 理 2}}$

$f(x)$: $a\leqq x\leqq b$ で2回微分可能

$$M_0=\mathrm{Max.}|f(x)| \qquad a\leqq x\leqq b$$
$$M_2=\mathrm{Max.}|f''(x)| \qquad a\leqq x\leqq b$$

$b-a\geqq 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ とするとき，

〔a, b〕の凡ての x の値に対して，

$|f'(x)|\leqq 2\sqrt{M_0M_2}$ である。

（証明）

(1) $f(a)-f(x)=(a-x)\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2}(a-x)^2\cdot f''(\xi_1) \qquad a<\xi_1<b$

(2) $f(b)-f(x)=(b-x)\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2}(b-x)^2\cdot f''(\xi_2) \qquad a<\xi_2<b$

(2)−(1) $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2}[(b-x)^2\cdot f''(\xi_1)-(a-x)^2\cdot f''(\xi_2)]$

$$\therefore\quad -(b-a)\cdot f'(x)=-f(b)+f(a)+\frac{1}{2}[(b-x)^2\cdot f''(\xi_1)-(a-x)^2\cdot f''(\xi_2)]$$

$$(b-a)\cdot|-f'(x)|\leqq|-f(b)|+|f(a)|+\frac{1}{2}(b-x)^2\cdot|f''(\xi_1)|+\frac{1}{2}|-(a-x)^2|\cdot|f''(\xi_2)|$$

$$(b-a)\cdot M_1\leqq M_0+M_0+\frac{1}{2}[(b-x)^2+(a-x)^2]\cdot M_2$$

$$=2M_0+\frac{M_2}{2}[2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)]$$

$2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)$ は下凸の抛物線故 $x=a$ を代入すると更に大なる値をとるから

$$\leqq 2M_0+\frac{M_2}{2}[2a^2-2(a+b)a+a^2+b^2]$$

$$= 2M_0 + \frac{M_2}{2}(b-a)^2$$

$$\therefore \quad M_1 \leqq \frac{2M_0}{b-a} + \frac{M_2}{2}(b-a)$$

$b-a \geqq 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ を代入すると右辺は $2\sqrt{M_0 M_2}$ となる。