

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\} \cdot u = 0 \quad (6) \quad u = A \cdot J_0 \left[i \cdot r \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

と、なるから有限な解だけ取れば結局、次のようになる。

J_0 は第一種の零階の Bessel 函数
(4) の条件から

$$A = \frac{G}{4h/K \cdot J_0 \left[i \cdot a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] + J_0' \left[i \cdot a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]}$$

留数計算をして逆変換を、おこなへば

$$y(t,r) = \frac{G J_0 \left[i r \frac{\mu_n}{l} \right]}{4h/K J_0 \left[i a \frac{\mu_n}{l} \right] + J_0' \left[i a \frac{\mu_n}{l} \right]} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{pt} J_0 \left[i r \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \cdot G}{p \cdot \frac{d}{dp} \left\{ \frac{4h}{K} J_0 \left[i a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] + J_0' \left[i a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \right\}} \right\}_{p=p_m}$$

故に求むる解は次のようになる。

$$T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\mu_n}{l} z + \frac{hl}{K \mu_n} \sin \frac{\mu_n}{l} \cdot z \right) \cdot \left\{ \frac{G \cdot J_0 \left[i \cdot r \cdot \frac{\mu_n}{l} \right]}{4h/K J_0 \left[i a \frac{\mu_n}{l} \right] + J_0' \left[i a \frac{\mu_n}{l} \right]} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{pt} J_0 \left[i r \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \cdot G}{p \cdot \frac{d}{dp} \left\{ \frac{4h}{K} J_0 \left[i a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] + J_0' \left[i a \left\{ \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 + \frac{p}{k} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \right\}} \right\}_{p=p_m} \right\}$$

参考文献

- 1) : 熱伝導論、川下研介著 277頁
- 2) : 鋼の熱処理と作業標準、日本鉄鋼協会編 (1951), 20~22, 頁

周邊の任意形状の固定板の自由振動

米 澤 博

1. まえがき

著者はさきに任意形状の周邊を有する板の自由振動の一解法を考え、それを周邊固定せる正方形板に適用して好結果をえた。その後さらにこの方法を実験的に確めるため、後述の如き固定板につき実験により得た結果と、著者の方法

により得た結果とを比較検討してみた。

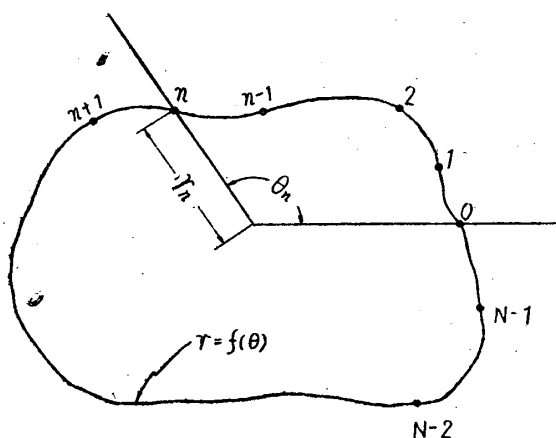
2. 一般解法

壺井氏が湖水の振動に用いた方法⁽²⁾を板の振動に拡張して、板の振動中の撓みを次の如く極座標⁽³⁾ (r, θ) を用いてあらわす。

$$w = A_0 J_0(kr_n) + B_0 I_0(kr_n) + A_1 J_1(kr_n) \cos \theta_n + B_1 I_1(kr_n) \cos \theta_n + \dots + A_{N-1} J_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n + B_{N-1} I_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n \quad (1)$$

第1図のごとく周邊の形が $r=f(\theta)$ にてあらわされる板の周邊上の n なる点で固定条件が満足されるとする。すなわち(1)式に固定条件を適

用すると⁽⁴⁾



第 1 図

$$A_0 J_0(kr_n) + B_0 I_0(kr_n) + A_1 J_1(kr_n) \cos \theta_n + B_1 I_1(kr_n) \cos \theta_n + \dots + A_{N-1} J_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n + B_{N-1} I_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n = 0 \quad (2)$$

および

$$A_0 k J'_0(kr_n) + B_0 k I'_0(kr_n) + A_1 \{kJ'_1(kr_n) \cos \theta_n + \frac{1}{r_n} f'(\theta_n) J_1(kr_n) \sin \theta_n\} + B_1 \{kJ'_1(kr_n) \cos \theta_n + \frac{1}{r_n} f'(\theta_n) I_1(kr_n) \sin \theta_n\} + \dots + A_{N-1} \{kJ'_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n + \frac{N-1}{r_n^2} f'(\theta_n) J_{N-1}(kr_n) \sin(N-1)\theta_n\} + B_{N-1} \{kJ'_{N-1}(kr_n) \cos(N-1)\theta_n + \frac{N-1}{r_n^2} f'(\theta_n) I_{N-1}(kr_n) \sin(N-1)\theta_n\} = 0 \quad (3)$$

ただし $n=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$

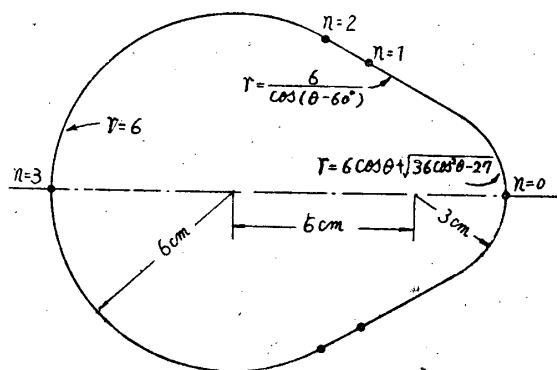
$$k^4 = \frac{3(1-\sigma^2)\rho p^2}{Eh^2}$$

ρ : 板の密度 E : Young率 σ : Poisson比
 h : 板厚の半分 p : 振動率

いま第1図の周辺上の N 個の点にて(2), (3)式が成立つとすると、計 $2N$ 個の方程式が成立つ。これらの $2N$ 個の方程式から $A_0, \dots, A_{N-1}, B_0, \dots, B_{N-1}$ の $2N$ 個の係数を消去すると振動数方程式を得るわけである。

3. 数値計算

試験片製作の便宜上第2図の如き板につき数値計算を行った。 $n=0(\theta=0)$, $n=1(\theta=45^\circ)$, $n=2(\theta=60^\circ)$, $n=3(\theta=180^\circ)$ の4点にて周辺条件を満足させると、上下対称であるから図の



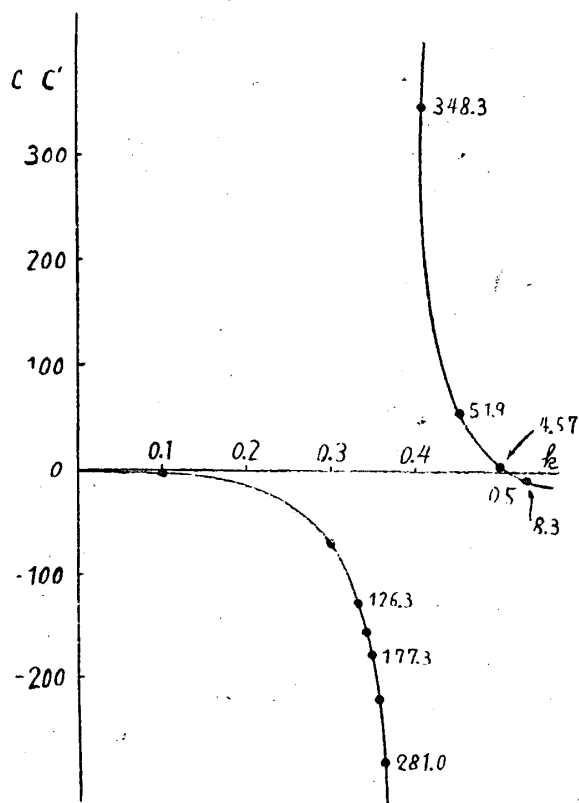
第 2 図 数値計算に用いた板の形状

黒点にて固定される。各点に相当する $r_n, f'(\theta_n)$ を出し(2), (3)式に代入すると計8個の方程式を得る。 k に適当な値を仮定して $A_3, A_2, A_1, B_3, B_2, B_1$ の係数を消去すると

$$\left. \begin{aligned} CA_0 + B_0 &= 0 \\ C'A_0 + B_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

の2式が残る。 k の値が正しければ $C=C'$ となつて振動数が決定する。

k の種々な値に対して、Trial and error method により $C=C'$ の値を計算した結果を第3図に示す。これより $C=C'=0$ になる k_n^* を求めると



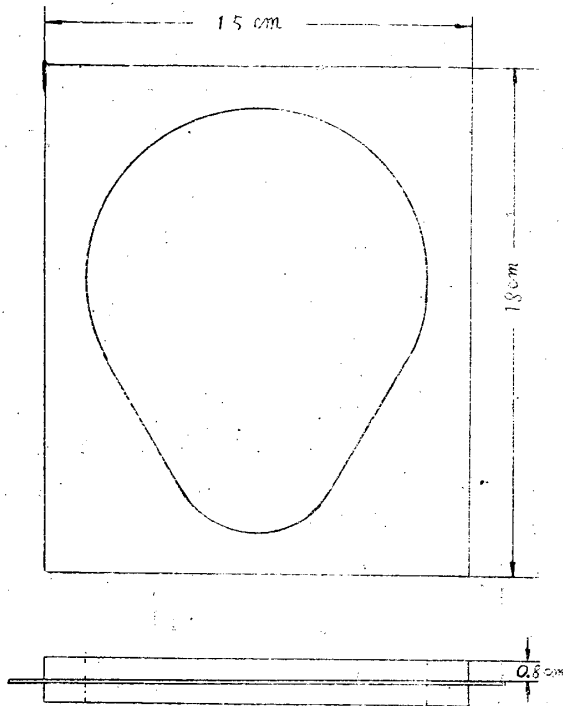
第 3 図 計算結果

$$k \doteq 0.51$$

となる。

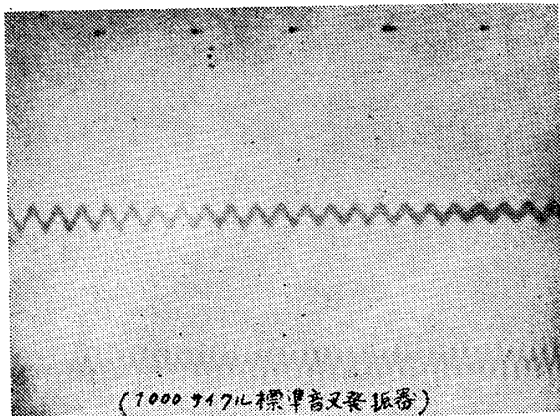
4. 実験および計算結果との比較

第2図と同形の板の固定条件を近似的に満足させるため、第4図の如く鉄板2枚を第2図と同形にくりぬき、その間に試験片のジュラルミン板(厚さ0.82mm)をはさんで10ヶ所をボルトでしめた。なお板をはさむ鉄板の面は研磨すり合せして用いた。板の中央部を軽くたたいて



第4図

発する音をマイクロホンに入れオツシログラフにとり、同時に1000サイクルの標準音叉発振器を用いて時間を記録して振動数を測定した。オツシログラフにとつた結果を第5図に示す。そ



第5図 板の振動をオツシログラフにとつたもの

の結果は毎秒振動数(最低次)465.1であつた。(さらに厚さ0.15mmの真鍮板にて実験したが薄いため固定すると中央部に撓みを生じ、振動の減衰がひどく、思わしい結果を得られなかつたが結果のみ述べて振動数約54となつた)計算値と比較するため、 $E=0.7 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma=0.3$, $2h=0.082 \text{ cm}$, ジュラルミンの比重2.8なる値を用いて測定せる振動数よりkを出すと

$$k = 0.488$$

上記の E, h, ρ の値は実測値であるが、 σ は E と剛性率⁽⁶⁾とから計算したものである。(真鍮では $k=0.46$ となつた。)また実験では板の固定条件は厳密には満足されていないであろうし、一方数値計算ではわずかに $N=4$ としたこと等から考えて、数値計算の結果は満足すべきものと考えられる。

5. むずび

一種類の形状につき数値計算と実験結果とを比較したにすぎないが、任意形状の板の振動を解く一方法としては十分実用的価値あるものと思う。なおさらに正確なる値の必要な場合には、 N の数をふやせばよいわけである。

(この研究中の実験は文部省科学研究費によつたものでここに感謝の意を表する)

参考文献

- (1) 著者: 鳥取大学工学部研究報告V.1N.1 (1950)
- (2) 壺井伊八: 海と空 V.15N.1
- (3) 同じような方法を糸川英夫氏が応用力学(1949)に発表した。著者の方法は糸川氏より境界条件の満たしかたが厳密であり糸川氏は数値計算のみ行つた。
大久保肇氏は同様な方法を軸のねじり問題に適用した。機械学会論文集V.16 N55同V.17 N.61
- (4) (1) 参照
- (5) 芝亀吉: 物理常数表(岩波昭19)の値を採用した。