組合繰返応力に対する耐久限度条件式

第4報　一般組合繰返応力（その1）

大　野　元　明

1. 緒　　　言

組合静応力と同時に組合両振応力が重なる場合すなわち一般組合繰返応力についての破損法則としては小野[1)]，西原[2)] 氏の両仮説が代表的なものである。小野氏は強さの標準に関する一つの考え方として繰返応力を静の主応力 σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} で示し振動する主応力を $\pm\sigma_{r1}$, $\pm\sigma_{r2}$, $\pm\sigma_{r3}$ で示して $M=\sqrt{(\sigma_{m1}-\sigma_{m2})^2+(\sigma_{m2}-\sigma_{m3})^2+(\sigma_{m3}-\sigma_{m1})^2}$, $R=\sqrt{\sigma_{r1}-\sigma_{r2})^2+(\sigma_{r2}-\sigma_{r3})^2+(\sigma_{r3}-\sigma_{r1})^2}$ を考え M は材料の変形による硬化を惹起し R は材料の強さを低下するものとしている，そして強さの仮説として静応力に対する Mohr の応力線図における直線の限界線に原点から下した垂線の長さ p が M 及び R によって変化するものと見なし p が変じて限界直線が丁度最大剪断応力に相当する主要円に接するに至れば破壊がおこるとしている条件式は

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\cos\varphi=P_0-\alpha R\pm\beta M+\gamma MR$$

で表わされる，ここに $\sigma_1=\sigma_{m1}+\sigma_{r1}>\sigma_3=\sigma_{m3}+\sigma_{r3}$ で φ は上記垂線が σ 軸とのなす角を示し p_o $\alpha\,\beta\,\gamma$ などは実験結果から定められる。西原一河本氏は「延性の大なる材料においては繰返応力による最大剪断応力が変容の程度によって変化する定数値に達するとき疲労破壊をおこし，脆性材料及び延性の比較的乏しい材料においては繰返応力による最大主応力が変容の程度によって変化する定数値に達するとき疲労破壊をおこす」と仮定し破損法則を表わされている。これら両仮説は一般式の形がかなり複雑であり特に限界値構成の理論は難解であるが，しかし既存の実験結果には大体当てはまるようになっている。

この他中西[3)]，西原・遠藤[4)]，川田・児玉[5)]氏などの破損法則があり引張，圧縮耐久線や組合曲捩り耐久限などについて詳しく論ぜられている。横堀氏は物理，材料学的基礎に立脚して疲労方向 φ_m の剪断応力 $\tau_{\varphi m}$ によって n 個の転位が集積しこの集積転位群の附近に $n\tau_{\varphi m}$ なるオーダーの引張応力が生ずるとして φ_m に直角方向の引張応力に応力集中係数 q を附加し $q(\sigma_{\varphi m}+\pi/2+n\tau_{\varphi m})=$ 一定の条件で表わされている，これによれば種々な疲労現象の説明も可能とされている。

筆者の条件式は次項に説明するような材料力学的仮説に立脚するものでその目的とするところは従来の仮説よりもさらに簡単な方式によって一般組合繰返応力に対する耐久限度を算出することである。

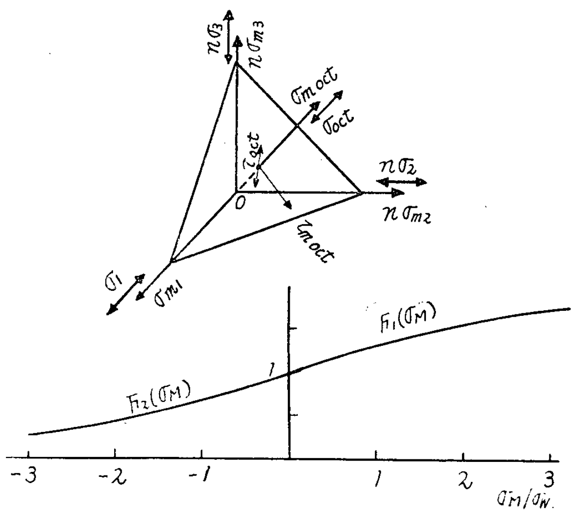
2. 仮説の構成について

同周期，同位相の繰返三主応力が作用する場合に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を変動主応力範囲とし σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} をそれぞれの平均応力とする。疲労破壊は各材料の組織の相異によって最大主応力の方向あるいは最大剪断応力の方向またはその中間の方向など異った方向に起るものと考えられ，疲労をおこす原因は σ_1, σ_2, σ_3 によるこの方向の繰返剪断およびそれに垂直な引張圧縮であると推定される。

今 $|\sigma_1|>|\sigma_2|,|\sigma_3|$ とすれば脆性材料では面の法線が σ_1 軸の方へ偏った面の方向，延性材料では σ_1, σ_2, σ_3 軸と等傾角をなす所謂八面体面方向または法線が σ_1 軸から若干遠ざかった面の方向と仮定することが出来る。すなわち脆性材料では普通の引張試験，捩り試験などでは引張主応力を破壊の条件にとるが耐久限度に相当する程度の比較的小さい応力では最大主応力 σ_1 に対して σ_2, σ_3 もある程度効き，延性材料では σ_1, σ_2, σ_3 が大体同じ比率で疲労仕事に関与するが特に延性の大なるものでは σ_1 に対し σ_2, σ_3 の効く比率が1よりも大になる場合も生ずることを意味している，これは材料によって異る変形の大小が内部に生ずる欠陥に対する応力集中と関連する結果と考えられる。したがって主応力差の大小に関せず n は材料による定数とする。そこで八面体面を仮にすべての材料についての疲労方向とすれば疲労に関係する三主応力は σ_1, $n\sigma_2$, $n\sigma_3$ の三相当主応力をもって示され n は材料によって定められるべき値となる。低炭素鋼にて $n=1$ とすれば延性の更に大なるものでは $n>1$ であり脆性が大なるものほど n は1より小さくなる。

さて第1図は σ_1, $n\sigma_2$, $n\sigma_3$ の作用している八面体面を示す，平均応力も上記と同理由で σ_{m1}, $n\sigma_{m2}$, $n\sigma_{m3}$ で示される。疲労に関係するのはこの図で τ_{oct} および σ_{oct} であって τ_{oct} が組織の構造を弱め σ_{oct} はそれを逐次分離せしめてゆく作用をもつとみることが出来る。そこで材料の疲労はこの τ_{oct} による仕事量

$$[(\sigma_1-n\sigma_2)^2+n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-n\sigma_3)^2] \qquad (1)$$



第 1 図

を基本量として表わすことにし，$\sigma_{moct}=0$ のときの σ_{oct} の影響を(1)の倍率1で与えることにすれば(1)がその場合の疲労仕事となる。両振の場合は $\sigma_{m1}=\sigma_{m2}=\sigma_{m3}=0$ であるからこれに相当する。(1)は剪断歪エネルギー則の修正を示している。σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} がすべて零でなく σ_{moct} が正なるときは疲労方向に垂直な正の静歪が生じ剪断変形抵抗を弱め疲労仕事は両振の場合より増大し，σ_{moct} が負の場合には負の静歪を生ずるため両振の場合よりも減少するものと考えられる。よって上記の関係を与える $\sigma_M=3\sigma_{moct}=\sigma_{m1}+n(\sigma_{m2}+\sigma_{m3})$ の函数 $F(\sigma_M)$ を(1)に乗じ

$$F(\sigma_M)\cdot[(\sigma_1-n\sigma_2)^2+n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+(n\sigma_3-\sigma_1)^2] \qquad (2)$$

但し $F(\sigma_M)$ は $\sigma_M=0$ のとき1

で一般応力状態の疲労仕事を表わす。$F(\sigma_M)$ は第1図のごときものと予想する。

次に平均応力 σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} は疲労仕事とは別に材料内に一様に静的変形を生じて弾性エネルギーを蓄えるがこれは σ_1, σ_2, σ_3 の大きさには無関係に σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} の中で最大なものを σ_{m1} とすれば矢張り σ_{m1} を主として $n\sigma_{m2}$, $n\sigma_{m3}$ によるエネルギーが(2)の疲労仕事と相並んでその材料に与えうるエネルギー量を限定するものと仮定して

$$F(\sigma_M)[(\sigma_1-n\sigma_2)^2+n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+(n\sigma_3-\sigma_1)^2]+\text{係数}\times\left\{\begin{array}{l}[\sigma_{m1},\ n\sigma_{m2},\ n\sigma_{m3}\text{によるエネルギー}]\\ [\sigma_{m2},\ n\sigma_{m3},\ n\sigma_{m1}\quad 〃\quad]\\ [\sigma_{m3},\ n\sigma_{m1},\ n\sigma_{m2}\quad 〃\quad]\end{array}\right\}=\text{限界値}C \qquad (3)$$

で表わす，ここに n はすべて同一値である。限界値 C は応力状態の如何にかかわらずその材料について一定値と定める。(3)はこの条件の成立の可能性を予め推定したものであるが，しかしここでは(3)が各材料毎に成立するように左辺を構成すべきことを示すものとする。そこで(3)において変動応力 σ_1, σ_2, σ_3 が存在しない場合には σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} による破損破壊の条件式となるがこれは本仮説においては極限強さに適合せしめる。

条件式中の静エネルギーは延性材料と脆性材料とでは区別されるべきである，延性材料には降伏点が存在しこの点で材料の性質に急激な変化を来し応力歪線図もその形を異にするためである。また延性材料では静降伏をおこす範囲とおこさない範囲とでは同一のエネルギー式で示すことは不適である，降伏をおこせば塑性歪が生じ弾性歪がこれと共存している，σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} に各振幅を加えた上限応力によって正の降伏を起さない範囲では剪断歪エネルギーがこれに該当すると考えられ正の降伏点以上では塑性変形を生じてエネルギーの一部は失われるが繰返応力の作用している状態では塑性歪を除外した弾性歪に対するエネルギーのみがこの条件に関係するものと考え，かつ耐久限界の極限は静極限強さ（単純応力では引張強さ）に向うものとしてそれを満足するように極限点に対して全弾性歪エネルギー一定の条件を仮定する。これは逆水圧的応力状態に対しても分離破壊の静極限点が存在することを満足せしめるためである。そして降伏点から極限点までの中間においては剪断歪エネルギーと全弾性エネルギーの中間を用いるようにすれば簡単でありまた実際とも大体合致するものとみられる。上記と同様に平均応力の圧縮側における降伏点までは剪断歪エネルギーを用いそれ以上の負応力に対しては塑性歪を除外した弾性歪に対する剪断歪エネルギーを用いるべきであるが，この場合試験片断面積の不等変化を考慮して係数に修正を加える。さて単純応力の繰返引張圧縮の耐久限度線図を見るに延性材料ではあたかも静応力歪線図を横倒しにした形をなし引張片振耐久限及び圧縮片振耐久限 $\sigma_u/2, \sigma_{-u}/2$ の間には降伏点に相当した境界点が現れていない，むしろ $\sigma_u/2$, $\sigma_{-u}/2$ を降伏点とみならして上記の静エネルギーを区分する境界点とする方が都合がよい，この関係は一般応力状態の降伏点と片振耐久限とにおいても同様と考える。よって静エネルギーの採り方を延性材料の正の領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\geq 0$ については次のごとくする，平均応力の零から片振限界までは

$$\rho_0\frac{1}{2G}\tau_{moct}^2=\rho\left[\sigma_{m1}^2+n^2(\sigma_{m2}^2+\sigma_{m3}^2)-n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m3}\sigma_{m1})\right]$$

を静エネルギーとし極限強さの点で

$$\rho_0\frac{1}{2E}\left[\left[\sigma_{m1}^2-n^2(\sigma_{m2}^2+\sigma_{m3}^2)-\frac{2}{m}n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m3}\sigma_{m1})\right]\right.$$

をとるものとして片振限界から極限強さまでは，$E/G=2.6$, $2/m=0.6$ として

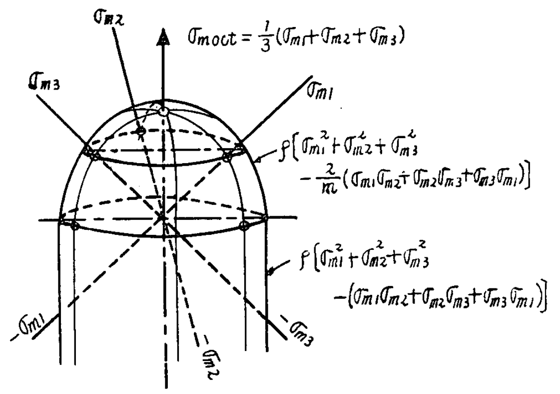
$$\rho\left[\sigma_{m1}^2+n^2(\sigma_{m2}^2+\sigma_{m3}^2)-n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m3}\sigma_{m1})+0.73\frac{\sigma_{m1}-\sigma_{m1s}}{\sigma_{m1b}-\sigma_{m1s}}\{\sigma_{m1}^2\right.$$
$$\left.+n^2(\sigma_{m2}^2+\sigma_{m3}^2)-0.052n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m3}\sigma_{m1})\}\right] \tag{4}$$

但し，$\sigma_{m1s}=$ 片振耐久限の σ_{m1} の値

$\sigma_{m1b}=$ 静極限点の σ_{m1} の値

で表わす，比例常数 ρ は単純引張における極限強さ σ_B を耐久線が過るという条件から定める。

脆性材料では降伏点が存在せず応力歪線図も単純な曲線的形状を呈する関係から平均応力が零から正の静破壊に到るまで及び零から負の静破壊に到るまでのそれぞれの範囲に対して一形式の静エネルギーの形で与えることが出来る，すなわち引張領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\geq 0$ においては最大



第2図　静極限強さ限界の仮定(延性材料)

主応力による引張歪エネルギーを用い圧縮の領域においては絶対値の最大な主応力を主とした剪断歪エネルギーまたは三主応力のうちの何れかによる引張歪エネルギーを用いる。脆性材料の疲労仕事に関しては延性材料と全く同じ方式によることはすでに記した通りである。

第2図は延性材料における静極限強さの限界についての筆者の仮定を示す。限界面は楕円体表面と円筒面である。

3. 耐久限度条件式

前節に述べた方法に基いて耐久限度条件式をたてると次のごとくなる。

σ_1, σ_2, σ_3：繰返三主応力（応力範囲）$|\sigma_1|>|\sigma_2|$, $|\sigma_3|$

σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3}：σ_1, σ_2, σ_3 方向の平均応力 $|\sigma_{m1}|\gtreqless|\sigma_{m2}|$, $|\sigma_{m3}|$

n：疲労仕事構成において σ_1, σ_{m1} に対して σ_2, σ_{m2} および σ_3, σ_{m3} の効き方を示す定数

静エネルギー構成において σ_{m1}, σ_{m2}, σ_{m3} のうち最大なものに対して他主応力の効き方を示す定数

何れの場合に対しても材料が同一なれば同一値を用いる。

C ：一定繰返数の耐久限度におけるエネルギー限界値で応力状態の如何にかかわらず材料について一定値をとる。

$\sigma_M=\sigma_{m1}+n(\sigma_{m2}+\sigma_{m3})$：有効八面体垂直応力，$\sigma_l$ に対する平均応力を主にとること

$F_1(\sigma_M)$：$\sigma_M\geq 0$ の範囲の σ_M の函数で $\sigma_M=0$ で1の値をとる。

$F_2(\sigma_M)$：$\sigma_M\leq 0$　　〃　　〃

$A=[(\sigma_1-n\sigma_2)^2+n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+(n\sigma_3-\sigma_1)^2$：両振疲労仕事

$B=[\sigma_{m1}{}^2+n^2(\sigma_{m2}{}^2+\sigma_{m3}{}^2)-n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m3}\sigma_{m1})]$　$|\sigma_{m1}|\geq|\sigma_{m2}|$, $|\sigma_{m3}|$

B'＝上式を σ_{m2}, $n\sigma_{m3}$, $n\sigma_{m1}$ で書いたもの $|\sigma_{m2}|\geq|\sigma_{m3}|$, $|\sigma_{m1}|$

B''＝　〃　σ_{m3}, $n\sigma_{m1}$, $n\sigma_{m2}$　　〃　　$|\sigma_{m3}|\geq|\sigma_{m1}|$, $|\sigma_{m2}|$

$D=[\sigma_{m1}{}^2+n^2(\sigma_{m2}{}^2+\sigma_{m3}{}^2)-0.052n(\sigma_{m1}\sigma_{m2}+n\sigma_{m2}\sigma_{m3}+\sigma_{m1}\sigma_{m3})]$

D'＝上式を σ_{m2}, $n\sigma_{m3}$, $n\sigma_{m1}$ で書いたもの $|\sigma_{m2}|\geq|\sigma_{m3}|$, $|\sigma_{m1}|$

D''＝　〃　σ_{m3}, $n\sigma_{m1}$, $n\sigma_{m2}$　　〃　　$|\sigma_{m3}|\geq|\sigma_{m1}||$, $|\sigma_{m2}|$

σ_{m1b}＝正領域 $(\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\geq 0)$ の極限強さにおける σ_{m1} の値

σ_{m1s}＝正領域の片振耐久限の σ_{m1} の値

$F(\sigma_M)$：$F_1(\sigma_M)$, $F_2(\sigma_M)$ の総称

とすると

〔延　性　材　料〕

i　正領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\geq 0$ のとき

0〜片振耐久限

$$F(\sigma_M)[A]+\rho[B,B',B'']=C \tag{5}$$

片振耐久限〜極限強さ

$$F(\sigma_M)[A]+\rho[(B,B',B'')+0.73\frac{\sigma_{m1}-\sigma_{m1s}}{\sigma_{m1b}-\sigma_{m1s}}(D,D',D'')]=C \tag{6}$$

ii　負領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\leq 0$ のとき

0〜片振耐久限

$$F(\sigma_M)[A]+\rho[B,B',B'']=C \tag{7}$$

片振耐久限〜極限強さ

$$F(\sigma_M)[A]+(\rho\rightarrow\rho')[B,B',B'']=C \tag{8}$$

iii　$\sigma_{m1}=\sigma_{m2}=\sigma_{m3}=0$ のとき　　$[A]=C$　(9)

但し $F(\sigma_M)$ は $\sigma_M=\sigma_{m1}+n(\sigma_{m2}+\sigma_{m3})\geq 0$ のときは $F_1(\sigma_M)$

$\sigma_M=$　〃　≤ 0　〃　$F_2(\sigma_M)$

$\sigma_M=0$ のときは　1

(8)の ρ' は断面積の不等変化を考慮して ρ が修正されるべきことを示す。

$[B,B',B'']$ は三者の中で最大なものを用いることを意味する。

〔脆　性　材　料〕

i　正領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\geq 0$ のとき

0〜静破壊

$$F(\sigma_M)[A]+\rho[\sigma_{m1}^2,\sigma_{m2}^2,\sigma_{m3}^2]=C \tag{10}$$

ii　負領域 $\sigma_{m1}+\sigma_{m2}+\sigma_{m3}\leq 0$ のとき

0〜静破壊

$$F(\sigma_M)[A]+[\rho(\sigma_{m1}^2,\sigma_{m2}^2,\sigma_{m3}^2),\rho'(B,B',B'')]=C \tag{11}$$

iii　$\sigma_{m1}=\sigma_{m2}=\sigma_{m3}=0$ のとき　　$[A]=C$　(12)

但し $F(\sigma_M)$ は $\sigma_M=\sigma_{m1}+n(\sigma_{m2}+\sigma_{m3})\geq 0$ のとき $F_1(\sigma_M)$

$\sigma_M=$　〃　≤ 0　〃　$F_2(\sigma_M)$

$\sigma_M=0$ のとき　1

$\rho[\sigma_{m1}{}^2,\sigma_{m2}{}^2,\sigma_{m3}{}^2]$ は三者の中で最大なものをとり〔$\sigma(\quad),\sigma'(\quad)$〕は二者の中で大なる方を用いることを意味する。

(5)〜(8)式中の $F(\sigma_M)$ すなわち $F_1(\sigma_M)$, $F_2(\sigma_M)$ は第1図に示したように $\sigma_M=0$ で1の値をもち連続するがそれぞれ別個の函数である。これを数値計算を容易ならしめるため次のごとく表わす。

延性材料

$$\left.\begin{aligned}F_1(\sigma_M)&=1+\alpha\frac{2\sigma_M}{\sigma_u}-\beta\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_u}\right)^2 \quad \sigma_M\geq 0\\ F_2(\sigma_M)&=1-\alpha'\frac{2\sigma_M}{\sigma_{-u}}+\beta'\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_{-u}}\right)^2 \quad \sigma_M\leq 0\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

但し $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ は材料の種別によって定る定数で平均応力による疲労仕事の増減係数

脆性材料

$$\left.\begin{aligned} F_1(\sigma_M) &= 1+\alpha\frac{2\sigma_M}{\sigma_u}-\beta\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_u}\right)^2+\gamma\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_u}\right)^3 \qquad \sigma_M \geqq 0 \\ F_2(\sigma_M) &= 1-\alpha'\frac{2\sigma_M}{\sigma_{-u}}+\beta'\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_{-u}}\right)^2-\gamma'\left(\frac{2\sigma_M}{\sigma_{-u}}\right)^3 \qquad \sigma_M \leqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

但し $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ は材料の種別に基く定数で疲労仕事の増減係数

これらの分母に σ_u, σ_{-u} を用いたのは $\alpha, \beta,$ …… を定めるに便利なためである。$F_1(\sigma_M)$, $F_2(\sigma_M)$ は二次式，三次式の曲線の一部分を用いることになるから係数決定の場合に σ_M の必要な範囲において極大，極小を生じないように選ばなければならない。

4. 定数 $\rho\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'$ の決定及び引張，圧縮耐久限度線図

(i) 延性材料

引張圧縮耐久限度 σ_w においては $\sigma_{m1}=\sigma_{m2}=\sigma_{m3}=0$ であるから(9)式により $\sigma_1=2\sigma_w$ $\sigma_2=\sigma_3=0$ とおいて

$$8{\sigma_w}^2=C \tag{15}$$

繰返引張において σ_m を増大した極限は σ_B に向うことはすでに説明した通りであり(6)式にて $\sigma_{m1}=\sigma_B$, $\sigma_{m2}=\sigma_{m3}=0$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ とおいて

$$1.73\rho{\sigma_B}^2=C=8{\sigma_w}^2$$

$$\therefore\quad \rho=2.15\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_B}\right)^2 \tag{16}$$

よって ρ は σ_w/σ_B の実験結果から定める，これは炭素鋼では炭素含有量を横軸にとって従来実験されている多くの値をプロットして各鋼種に対して平均を求めた方がよい，第1表中の ρ はこのようにして(16)から算出したものである。

第 1 表

		軽合金 II	軽合金 I	A ≈0.15%	B ≈0.40%	C ≈0.45%	D ≈0.60%	E ≈0.9%	鋳 鉄
σ_T/σ_w		5.96	5.62	4.50	4.0	3.86	3.82	3.75	3.02
σ_{-u}/σ_w		1.970	2.38	2.57	2.66	2.68	2.71	2.73	5.55
σ_u/σ_w		1.970	1.78	1.635	1.610	1.600	1.585	1.580	1.46
ρ		0.230	0.360	1.025	0.67	0.636	0.569	0.536	0.88
ρ'									0.10
α		0	0.3361	0.4121	0.5047	0.5286	0.5601	0.5831	1.0
β		0	0.0461	0.0461	0.0461	0.0461	0.0461	0.0461	0.25
γ									0.025
α'		0	0.4549	0.6360	0.6370	0.6395	0.6446	0.6482	1.5755
β'		0	0.1180	0.1180	0.1180	0.1180	0.1180	0.1180	0.8340
γ'									0.1385
C	$\times{\sigma_w}^2$	8	8	8	8	8	8	8	8
	$\times{\sigma_v}^2$	2.0575	2.660	2.98825	3.0848	3.1240	3.1702	3.2082	3.770
	$\times{\sigma_v}^2$	2.0575	1.4162	1.2202	1.1297	1.1160	1.089	1.0736	0.265

次に片振引張，片振圧縮に対しては(5)，(7)にそれぞれ $\sigma_m=\sigma_u/2$, $\sigma_m=\sigma_{-u}/2$ を入れて

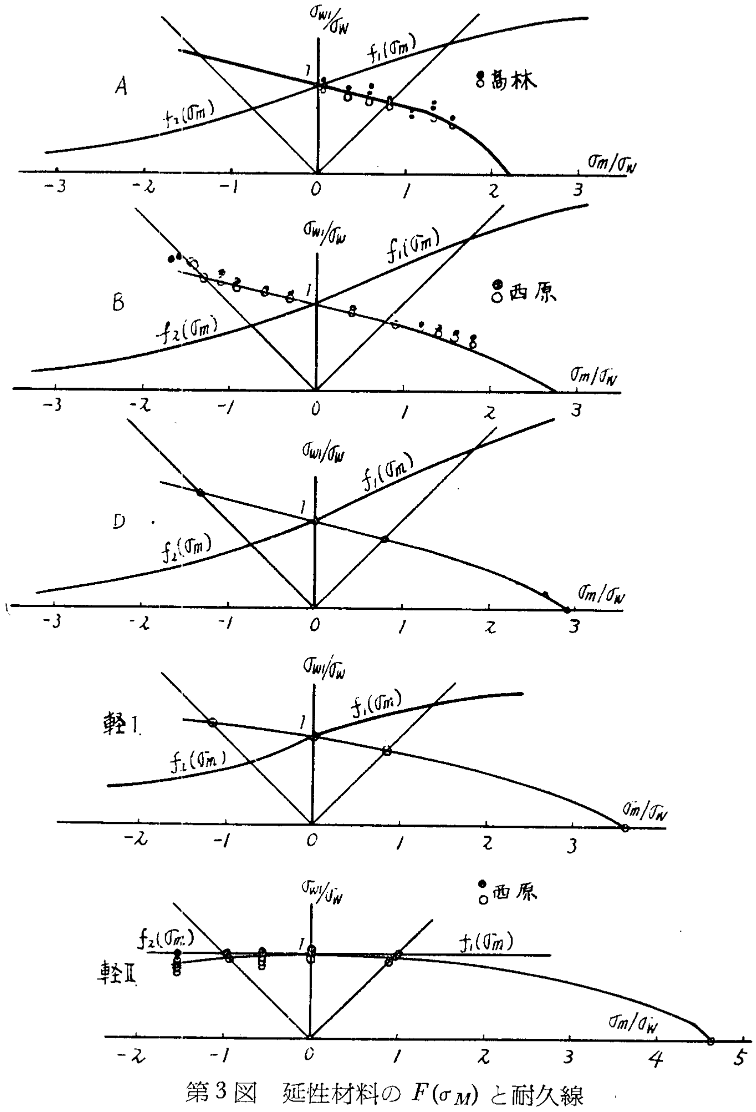
$$\left.\begin{aligned}\alpha-\beta&=4\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^2-\frac{\rho}{8}-1\\ \beta'-\alpha'&=4\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_{-u}}\right)^2-\frac{\rho}{8}-1\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

となるから σ_w/σ_u, σ_w/σ_{-u} を与えて α-β, β'-α' が定められるけれども $\sigma_{-u}/2$, σ_w, $\sigma_u/2$ が一直線上にのり真破壊強さ σ_T に向うという既存の実験結果を基にして

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_w}=\frac{2}{1+\dfrac{\sigma_w}{\sigma_T}}\qquad \frac{\sigma_{-u}}{\sigma_w}=\frac{2}{1-\dfrac{\sigma_w}{\sigma_T}}\qquad(18)$$

から求めた σ_u/σ_w, σ_{-u}/σ_w を(17)に入れて α-β, β'-α' を定める方がよいと思う。しかし必ずしもそうする必要はなく σ_w/σ_u, σ_w/σ_{-u} が確定しておればそれを直に(17)に入れてよい。

次に $\sigma_{-u}/2$, σ_w, $\sigma_u/2$ の点の $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ の値はすでにきまっているからこの三点を連ねる曲線を考えるに極軟鋼では σ_W の点の値1を中心にして σ_m の正の側と負の側では曲線がほぼ対称的に変化すべきものと考えられる，よって今 β と β' を一定値としてこの $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ を与えることを考え β=0.0461, β'=0.1180 の値をとって $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ の曲線を引いてみると第3



第3図　延性材料の $F(\sigma_M)$ と耐久線

図の上段のものが得られる。したがってこれが σ_m についての必要な範囲の $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ と仮定しても理論的な矛盾はない，よって計算を簡単にするために炭素鋼全般に対して β, β' を上記の一定値に定めてA～E鋼の5種類に適用して α, α' をきめた，それによって得られる $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ は第3図の B, D のごとくなる，炭素量が増せば σ_m が正の側の $f_1(\sigma_m)$ の曲線が上昇し σ_m の負の側の $f_2(\sigma_m)$ は幾分下ってくる。この $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ をこの材料の $F_1(\sigma_M)$, $F_2(\sigma_M)$ と仮定することになるので本仮説においては重要な点である。第1表はこのようにして定めた各鋼種の ρ, α, α', β, β' を示している。

表中の軽合金Ⅰは西原氏のヂュラルミンについての実験結果から算出したものであるがこの実験では平均応力が $0\sim\sigma_{-u}/2$ の間で耐久限度が著しく下っておるがこれを無視して $\sigma_{-u}/2$ の点を連ねてみたものであるから実験結果と全く一致したものではない，軽合金Ⅱは同じく西原氏の超ヂュラルミンについての実験結果を見て大略 $f_1(\sigma_m)=f_2(\sigma_m)=1$ が適用されるとしたものである。極軟鋼，軽合金などでは $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ は σ_w の点の値1を中心に対称的に示され延性大なるものほど σ_m に対する変化か小さくなる。軽合金Ⅰ，Ⅱなどの ρ の値は鋼に対する計算式(16)をそのまま使用して算出した。これらの合金では鋼の場合に比して σ_B/σ_w が大であるから ρ の値は極軟鋼のものに比べて低く出ている。

かくして定めた定数をもつ繰返引張，繰返圧縮の耐久限度線は延性材料に対して(5)，(7)により

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+\alpha\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}-\beta\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2\right][2\sigma_{u1}^2]+\rho\sigma_m^{\ 2}=C\\&\qquad\qquad\text{〃}\qquad\qquad\qquad+\rho\sigma_m^{\ 2}\left(1+0.73\frac{\sigma_m-\sigma_u/2}{\sigma_B-\sigma_u/2}\right)=C\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[1-\alpha'\frac{2\sigma_m}{\sigma_{-u}}+\beta'\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_{-u}}\right)^2\right][2\sigma_{-u1}^2]+\rho_m^{\ 2}=C\\&\qquad\qquad\text{〃}\qquad\qquad\qquad+(\rho\rightarrow\rho')\sigma_m^{\ 2}=C\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

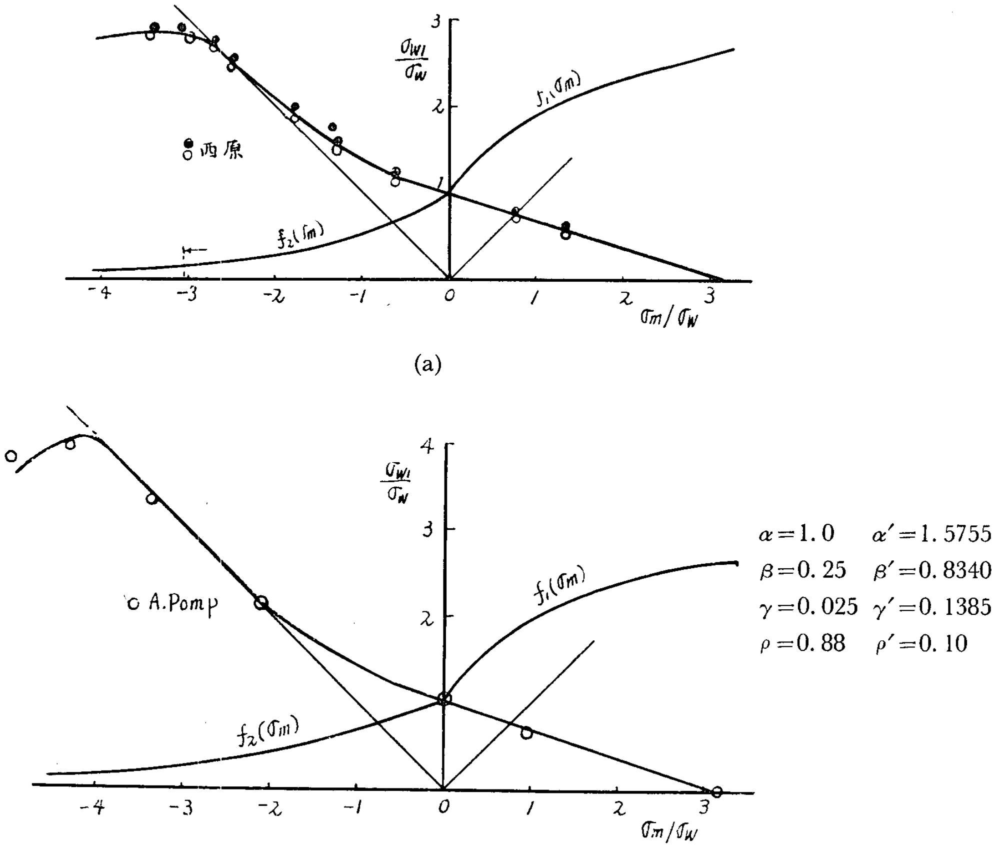
但し σ_{u1} は $\sigma_m(\geq 0)$ における耐久限界（応力範囲）
σ_{-u1} は $\sigma_m(\leq 0)$　　〃　　〃

で与えられる。この式が果して満足な耐久限界線を与えるか否か一応 σ_m の任意の値に対して逆算を行い耐久線を画くと第3図となる。よって先に求めた $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ はこれらの耐久限度線図を正しく表わしていることがわかる。

特殊鋼の耐久限度線図として N_i-C_r 鋼についての高林氏の実験結果がある，これは平均応力の正の範囲で相当高いところまで実験されており耐久線は σ_B に向うことを示している。この線図から(19)式によって ρ を求め σ_B/σ_T などの関係を調べてみると耐久限度条件式は先に求めたA鋼のものをそのまま用いても差支えないことが知られる，よってこれを第3図に比較した。軽合金Ⅱは先に記した様に $f_1(\sigma_m)=f_2(\sigma_m)=1$ で疲労仕事が平均応力の影響をうけないということを表わしている。耐久線の形は(19)式から楕円となる，西原，遠藤の仮説では左右対称の直線で表わされているがこの実験値に関しては何れが正しいかは検討し難い。

(ii)　脆性材料

鋳鉄の耐久限度線図は第4図の如く示される，α, β, γ, α', β', γ', ρ, ρ' の値はこの耐久線図から定められる，その方法は延性材料の場合と同様であるが負の耐久線の形状が著しく異るために(14)式に示したように三次式で示す必要がある，西原氏の実験結果のB鋳鉄について諸定数を定めたものが第1表中に掲げてある。



(a)

(b)

第4図　鋳鉄の $F(\sigma_M)$ と耐久線

耐久限度条件式は(10)，(11)，(14)より

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+\alpha\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}-\beta\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2+\gamma^3\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}\right)^3\right]2\sigma_{u1}^2+\rho{\sigma_m}^2=C\\&\left[1-\alpha'\frac{2\sigma_m}{\sigma_{-u}}+\beta'\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_{-u}}\right)^2+\gamma'^3\left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_{-u}}\right)^3\right]2\sigma_{-u1}^2+\rho'{\sigma_m}^2=C\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

となる。但し第4図(a)では $F(\sigma_m)$ の限界は $-3\sigma_w\sim3\sigma_w$ とする。もしこれで $-3\sigma_w$ 以上の負応力に対する限界を求める必要があれば図示のごとく $f_2(\sigma_m)$ の負方向に直線的に延長するのも一方法である。第4図(b)は他の鋳鉄に対する限界線で $\alpha\ \beta$ …… などは図に記入してある，これは A. Pomp の実験結果の一つに適合しているようである。この場合は図の如く $f_2(\sigma_m)$ の負方向への増大につれて耐久線が下降する範囲まで適用される，これはこの場合だけに限られず延性材料の場合もその範囲まで適用される。

上記のごとく実験結果を基にして各材料の繰返引張，圧縮を満足する $f_1(\sigma_m)$, $f_2(\sigma_m)$ を定めたがこれは第2報第4図に比較したごとく脆性大なるものではその変化が大で延性大なるものでは一定となる，超ヂュラルミンや或種の黄銅にては疲労が最大剪断応力のみによって生ずると言われていることに一致する。この $f_1(\sigma_m)$ は後に記する組合曲振りの耐久限界線と同様な関係を示している。

ここで従来の仮説と簡単に比較してみると，小野氏の引張，圧縮の耐久線は

$$\sigma_{w1}\left[1-\frac{2\sigma_m}{\sigma_w}\frac{C^2}{C_1}\left(1+\frac{1}{C}-\frac{1}{C_1}\right)\right]+C\sigma_m=\sigma_w\quad(C\ C_1\ は定数)$$

で示されこの式中の $C=\sigma_w/\sigma_B$ を入れて C_1 の値をかえれば耐久線の形が変化する，式の構成要素など⒆，㉑と類似したところがある。西原，河本氏の法則では σ_w と σ_T を結ぶ直線式で与えられ，鋳鉄の負の耐久線は上記直線式の延長と引張応力零の45°線で与え，さらに負の平均応力の高い範囲は別の直線をもって示されている，またこの部分は川田，児玉氏によって検討されている。筆者の仮説では耐久線の全範囲を $f_1(\sigma_m), f_2(\sigma_m)$を用いることによって耐久線の全範囲が表現されている。

5. n の決定，繰返二主応力耐久限

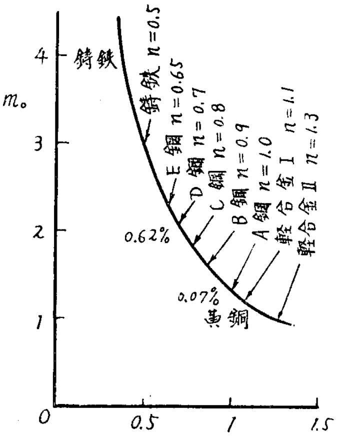
(1) 繰返剪断

(A) 両振剪断耐久限度 τ_{wo}

(9)式において $\sigma_1=2\tau_{w0}$, $\sigma_2=-2n\tau_{w0}$, $\sigma_3=0$ とおいて

$$\tau_{w0}=\frac{\sigma_w}{\sqrt{1+n+n^2}} \quad \text{or} \quad n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2\left(\frac{\sigma_w}{\tau_{w0}}\right)^2-3}-1\right] \tag{22}$$

この式から σ_w/σ_{w0} の実験値を基にして n が定る。τ_{w0} は薄肉円筒の両振振り耐久限度に相当するもので丸棒の両振振り耐久限度 τ_w との関係は第3報に記した $\tau_w=\sqrt{5/3}\cdot\tau_{w0}$ で与え，丸棒の両振曲げ耐久限度 σ_w'' は鋼では $\sigma_w''=1.33\sigma_w$ 鋳鉄では $\sigma_w''=1.25\sigma_w$ (T. C 3％程度) で与えると鋼（延性材料全般とする）では $\sigma_w/\tau_{wo}=1.03\sigma_w''/\tau_w$，鋳鉄では $\sigma_w/\tau_{w0}=1.065\sigma_w''/\tau_w$ となるから組合曲振りの実験結果その他から σ_w''/τ_w を求めて上記関係と㉒から n が定められる。第5図中にはかようにして決めた n の値が記入してある。



第5図　n と西原，遠藤氏の m_0 との関係

西原，遠藤氏の仮説では $m_0=\dfrac{\tau_w}{\sigma_w-\tau_w}$ で与えられているから，仮に $\sigma_w/\tau_{w0}=\sigma_w''/\tau_w$ として m_0 と n との関係を表わしてみると第5図のごとくなる。両氏の説は最大主歪を一定とするもので中間応力は考慮されていない。材料別に見て鋳鉄の位置にずれがあるのは換算係数1.065が入っていないためである。

(B) 片振剪断耐久限度 τ_{u0}

(5)，(7)に $\sigma_1=\tau_{u0}$, $n\sigma_2=-n\tau_{u0}$, $\sigma_3=0$, $\sigma_{m1}=\tau_{u0}/2$, $\sigma_{m2}=-n\tau_{u0}/2$, $\sigma_{m3}=0$, $\sigma_M=\sigma_{m1}+n\sigma_{m2}=(1-n)\tau_{u0}/2$ を入れて

延性材料

$$\left.\begin{array}{ll} 1\geq n & \left[(1+\alpha K-\beta K^2)2+\dfrac{\rho}{4}\right](1+n+n^2)\tau_{u0}^2=C \\ n\geq 1 & \left[(1-\alpha' K'-\beta' K'^2)2+\dfrac{\rho}{4}\right](1+n+n^2)\tau_{u0}^2=C \end{array}\right\} \tag{23}$$

但し $K=(1-n)\tau_{u0}/\sigma_u$ $K'=(n-1)\tau_{u0}/\sigma_{-u}$

脆性材料 $(n<1)$

$$\left[(1+\alpha K-\beta K^2+\gamma K^3)2(1+n+n^2)+\frac{\rho}{4}\right]\tau_{u0}^2=C \tag{24}$$

但し $K=(1-n)\tau_{u0}/\sigma_u$

(23), (24)にて τ_{u0} を計算し τ_{u0}/τ_{w0} を求めるとA鋼1.9, 鋳鉄1.55, 軽合金1.93, 軽合金II. 1.97となる。

(2) 二方向等大の片振引張, 引張圧縮。

直角二方向に相等しい大きさの片振引張が同周期, 同位相で作用するときの耐久限度 σ_{U1} は

$$\sigma_1=\sigma_{u1} \quad \sigma_{m1}=\sigma_{u1}/2 \quad n\sigma_2=n\sigma_{u1} \quad n\sigma_{m2}=n\sigma_{u1}/2 \quad \sigma_M=(1+n)\sigma_{u1}/2$$

を(5), (10)に入れて

$$\left.\begin{array}{ll}\text{延性材料} & \left[(1+\alpha K-\beta K^2)2+\frac{\rho}{4}\right](1+n^2-n)\sigma_{u1}^2=C \\ \text{脆性材料} & \left[(1+\alpha K-\beta K^2+\gamma K^3)2(1+n^2-n)+\frac{\rho}{4}\right]\sigma_{u1}^2=C\end{array}\right\} \tag{25}$$

$$\text{但し} \quad K=(1+n)\frac{\sigma_{u1}}{\sigma_u}$$

この式からA鋼 $\sigma_{u1}=1.45\sigma_w$ 鋳鉄 $1.6\sigma_w$, 軽合金II. $1.7\sigma_w$ などが算出される。

(9)または(12)に $\sigma_1=2\sigma_{w1}, n\sigma_2=2n\sigma_{w1}, \sigma_{m1}=0, \sigma_{m2}=0$ を入れると次式がえられる。

$$\sigma_{w1}=\sigma_w/\sqrt{1+n^2-n} \tag{26}$$

二主応力が共に引張の場合の(25), (26)などの限界線は $n=1$ のときは Mises の限界線に一致するが $n=0.5$ または $n=1.3$ に対しては第6図に示すごとく, 特に(26)で与えられる耐久限には若干のひらきが生ずる, 先に軽合金IIでは正, 負の二主応力範囲において最大剪断応力一定の限界にほぼ一致することを述べたが正二主応力の範囲ではこれに一致する訳ではない。この範囲について果してこれらの材料の実験結果がどのようになるかは詳らかでない。

(3) $\sigma_{u1}<\sigma_{-u2}$ の関係にある片振引張と片振圧縮

一方の繰返主応力範囲 σ_{u1} が片振引張で他方が σ_{-u2} の応力範囲をもつ片振圧縮のときはもし $|\sigma_{-u2}|>|\sigma_{u1}|$ であれば σ_{-u2} を主にとって

$$\sigma_2=\sigma_{-u2} \quad \sigma_{m2}=\sigma_{-u2}/2 \quad \sigma_1=-n\sigma_{u1} \quad \sigma_{m1}=-n\sigma_{u1}/2$$

を(7), (11)に入れて

$$\text{延材：} \quad \left[(1-\alpha'K'+\beta'K'^2)2+\frac{\rho}{4}\right](\sigma_{-u2}^2+n^2\sigma_{u1}^2+n\sigma_{-u2}\sigma_{u1})=C \tag{27}$$

$$\text{但し} \quad K'=\frac{\sigma_{-u2}-n\sigma_{u1}}{\sigma_{-u}}$$

$$\text{脆材：} \quad \left[(1-\alpha'K'+\beta'K'^2-\gamma K'^3)2+\frac{\rho'}{4}\right](\sigma_{-u2}^2+n^2\sigma_{u1}^2+n\sigma_{-u2}\sigma_{u1})=C \tag{28}$$

または

$$\left[(1-\alpha'K'+\beta'K'^2-\gamma K'^3)\,2\,(\sigma_{-u2}^2+n^2\sigma_{u1}^2+n\sigma_{u-2}\sigma_{u1})+\frac{\rho}{4}\right]\sigma_{u1}^2=C \tag{29}$$

この両式は $\frac{\rho'}{4}(\sigma_{-u2}{}^2+n^2\sigma_{u1}{}^2+n\sigma_{-u2}\sigma_{u1})$ と $\frac{\rho}{4}\sigma_{u1}{}^2$ を比較して大きい方の条件式を用

いる。

(27)で計算を行う場合 $n>1$ では $K'<0$ の場合も生ずるのでそのときは左端の（　）内が $1+\alpha K-\beta K^2$ で $K=(n\sigma_{u1}-\sigma_{-u2})/\sigma_u$ となる。

鋳鉄に対する計算を(28), (29)で行うには第1表中の $\alpha', \beta', \gamma', \rho', \rho, C$ を用い $n=0.5$ として $\sigma_{-u2}=3\sigma_{u1}$ の場合

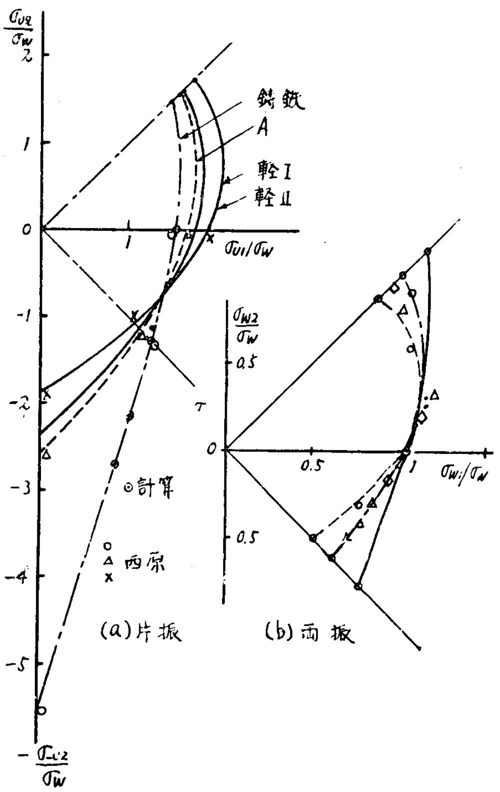
静エネルギー項を計算すれば(28)を用いるべきことがわかり

$$\sigma_{u1}=\sigma_{-u2}/3 \quad K=(\sigma_{-u2}-0.5\times\sigma_{-u2}/3)/\sigma_{-u}=5\sigma_{-u2}/6$$

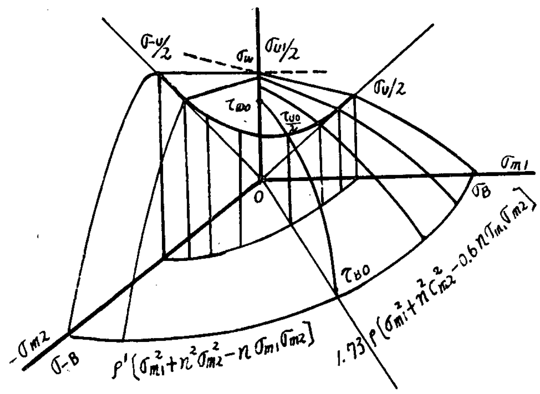
を(28)に入れて　$\sigma_{-u2}=0.48\sigma_{-u}=2.68\sigma_w$

となる。同様な計算を $\sigma_{-u2}=2\sigma_{u1}$ の場合について行うと(29)を用いるべきことがわかり計算を行うと $\sigma_{-u2}=0.38\sigma_{-u}=2.1\sigma_w$ がえられる。第6図(a)にはこれらの耐久限界点が示されている。

以上のごとくして片振耐久限界第6図(a)が求められる。また両振耐久限界第6図(b)をうる。実験値との比較は西原，遠藤氏の文献中から引用したが極めてよく合致している。両振耐久限は W. N. Findley の掲げているものと比較した。第7図は σ_{u1} と σ_{-u2} 領域における鋼の耐久線の変化を示す。これら二次元の限界線の中で第6図(b)の σ_{u1}-0-τ の部分は組合曲振りの実験結果と比較される。



第6図　二主応力の片振両振限界



第7図　耐久線の変化

(4)　繰返剪断とその平均応力

平均応力を τ_{m0} とし繰返剪断の耐久限度を τ_{u01}（応力範囲）で示す。

$$\sigma_1=\sigma_{u01},\ n\sigma_2=-n\tau_{u01},\ \sigma_{m1}=\tau_{m0},\ n\sigma_{m2}=-n\tau_{m0},\ \sigma_3=0,\ \sigma_{m3}=0$$

を(5), (6)及び(10)に入れて

延性材料

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}[1+\alpha K-\beta K^2]\\ [1-\alpha' K'+\beta' K'^2]\end{array}\right\rangle 2(1+n^2+n)\tau_{u01}^2+\rho(1+n^2+n)\tau_{m0}^2=C\\ \cdots\cdots\cdots\cdots + \rho\tau_{m0}^2\left[1+n^2+n+0.73\dfrac{\tau_{m0}-\tau_{m1}}{\tau_{B0}-\tau_{m1}}(1+n^2-0.052n)\right]=C\end{array}\right\} \quad (30)$$

但し　$K=2(1-n)\tau_{m0}/\sigma_u \quad K'=2(n-1)\tau_{m0}/\sigma_{-u}$

$$\tau_{m1}=\sigma_u/2\sqrt{1+n^2+n}$$

脆性材料

$$[1+\alpha K-\beta K^2+\gamma K^3]\,2(1+n^2+n)\tau_{u01}^2+\rho\tau_{m0}^2=C \tag{31}$$

$$但し\quad K=2(1-n)\tau_{m0}/\sigma_w$$

例えばA鋼では $n=1$ とおいて

$$\left.\begin{aligned}&2\tau_{u01}^2+\rho\tau_{m0}^2=C/3\\&6\tau_{u01}^2+\rho\tau_{m0}^2\left(3+1.5\frac{\tau_{m0}-\sigma_u/2\sqrt{3}}{\tau_{B0}-\sigma_u/2\sqrt{3}}\right)=C\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

となり片振限界までは楕円弧である。n の値が1より小となるにつれて直線限界の方へ近附く。第8図上参照。

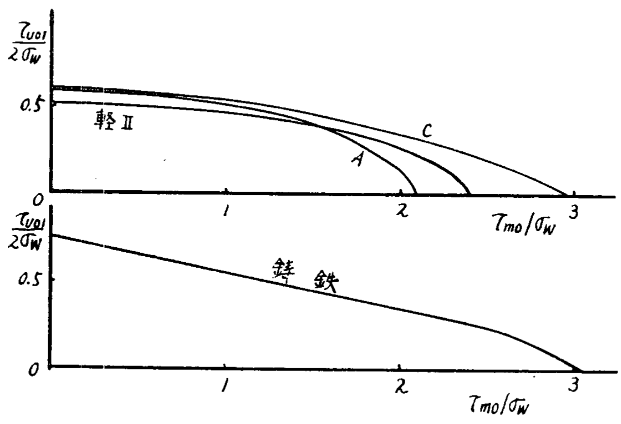
(31)で $n=0.5$ とおいて耐久線を算出すると第8図下となる，延性材料の場合と異り τ_{m0} の増大とともに直線的に下降する。

鋳鉄について(30)を繰返引張の耐久線(21)と比較すると

$$\left[1+\alpha\frac{2\sigma_m}{\sigma_u}-\beta(\,〃)^2+\gamma(\,〃)^3\right]2\sigma_{u1}^2+\rho{\sigma_m}^2=C$$

$$\left[1+\alpha\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u}-\beta(\,〃)^2+\gamma(\,〃)^3\right]3.5\tau_{u01}^2+\rho\tau_{m0}^2=C$$

であるから τ_{m0} と σ_m を相当量とすれば極限点は重なり限界線は下式の方が内側に入りその傾斜は緩慢である。よって τ_{u0}/τ_{w0} の比率は σ_u/σ_w の比率よりも大なることがわかる。計算値はすでに示したように $\sigma_u/\sigma_w=1.46$, $\tau_{u0}/\tau_{w0}=1.65$ である。



第8図　平均剪断と剪断耐久限界の関係

6. 結　　言

疲労破壊に関する法則として「繰返応力による疲労は材料によって異る方向におこりその方向の繰返剪断応力範囲とそれに伴う歪によって形成される疲労仕事に起因し，静応力の存在はその疲労仕事量に直接影響すると同時にその材料自体に静弾性エネルギーを蓄えるためこれを弱体化せしめる，この両エネルギーは対立的な関係において一定限度の条件を構成する，すなわち両者の相当量の和が一定値に達すれば疲労破壊を起す」という仮説をたて一般組合繰返応力状態に対

する耐久限度条件式を作製した。この条件式中には疲労仕事増減係数，静エネルギー係数，最大主応力に対する他主応力の効き方を示す材料別の常数などを含むがこれらは単純応力の繰返実験結果を基にしてすべて決定される。炭素鋼の5種類，ニッケル，クローム鋼，鋳鉄，軽合金I，IIについてそれ等の定数を決定した。条件式は延性材料，脆性材料とも繰返引張，圧縮の耐久線の全範囲について表わすことが出来ることは大なる特徴である，また疲労仕事を直接増減せしめると仮定した係数 $F(\sigma_M)$ は脆性材料にてはその変化が大で延性大なるものほど一定値に近附くことを表わし実験結果にも一致し内部摩擦説その他の考え方にも矛盾しないことなど基本条件式の正当なことを知りうる。二次元繰返応力に対する耐久限界は実験結果の存在するものについては極めてよく一致している，また平均応力との関係その他耐久線についての諸事項をも容易に説明しうるようである。

参考文献

1) 小野，機械学会論文集 6-25（昭15）
2) 西原，河本，機械学会論文集 9-35(昭16)
3) 中西不二夫，機械学会論文集 18-65，18-68(昭27)
4) 西原，遠藤，機械学会論文集 18-65(昭26)
5) 川田，児玉，機械学会論文集 22-115(昭31)
6) 横堀，材料強度学 242p.
7) 大野，山口大学々報 8-1，9-1(昭 32，33)