

(c)通信

# チャートを利用したメタマテリアルの材料定数推定法に関する一検討

## Estimation for Material Parameters of Metamaterial by Using Complex Chart Procedure

片山 直樹<sup>†</sup> 宇根 望<sup>††</sup> 河埜 慎吾<sup>†</sup> 堀田 昌志<sup>†</sup> 羽野 光夫<sup>†</sup>  
 Naoki Katayama<sup>†</sup> Nozomi Une<sup>††</sup> Shingo Kawano<sup>†</sup> Masashi Hotta<sup>†</sup> Mitsuo Hano<sup>†</sup>  
<sup>†</sup>山口大学大学院理工学研究科 <sup>††</sup>シャープ株式会社

### 1 はじめに

自然界に存在する一般的な媒質における、代表的な材料定数である誘電率や透磁率は正の値をとる。しかし、メタマテリアルの概念に基づいて人工的に構成した媒質の中には、材料定数が負の値をとるものが存在する。すなわち、誘導性や容量性を持ったセルと呼ばれる微小な構造を物質の分子に見立て、電磁波の波長に対して十分短い間隔で集積することで、材料定数が負となる媒質が構成できる。負の屈折率を有する媒質が予見され[1]、負の材料定数を持つ媒質がメタマテリアルの概念下で構成できることが理論的に立証[2]されて以来、これまでにない特性を持った様々なデバイス構築に向けた、メタマテリアルに関する基礎的あるいは応用的な研究が盛んに行われはじめた。本研究では、メタマテリアルに平面波照射した場合の S パラメータから、媒質の誘電率や透磁率を簡便に推定する手法について検討する。

### 2 材料定数推定法

メタマテリアルに平面波照射を行った場合に観測された、複素反射係数( $S_{11}$ )及び複素透過係数( $S_{21}$ )から解析的に材料定数を求める方法としては、これまでに以下のような手法が示されている[3]。

図1に示すようにメタマテリアルの単位セルを中心に配置し、その両側に自由空間領域を設ける。なお、図中に示されるような電界  $\mathbf{E}$  および磁界  $\mathbf{H}$  を持つ平面波を入射波に用いた場合、解析モデルの上下面に電気壁、左右面に磁気壁とする事で  $xy$  面内にこの単位セルが周期的且つ無限に広がっていると想定できる。ただし、 $\mathbf{k}$  は平面波の進行方向を示す。

S パラメータ ( $S_{11}$  及び  $S_{21}$ ) を用いると、媒質の特性インピーダンス  $Z$  及び屈折率  $n$  は次式のように表すことができる[3]。ただし、用いる  $S_{11}$  及び  $S_{21}$  は、メタマテリアルの単位セル表面での値となるように位相を補正している。

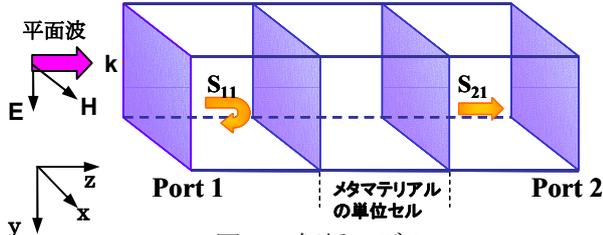


図1 解析モデル

$$Z = \pm \sqrt{\frac{(S_{11} + 1)^2 - S_{21}^2}{(S_{11} - 1)^2 - S_{21}^2}} \quad (1)$$

$$n = \frac{1}{kd} \left[ \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{2S_{21}} (1 - S_{11}^2 + S_{21}^2) \right\} \right]$$

式(1)で求めた  $Z$  及び  $n$  を用いると、代表的な材料定数である誘電率  $\epsilon$  及び透磁率  $\mu$  は次式で求めることができる。

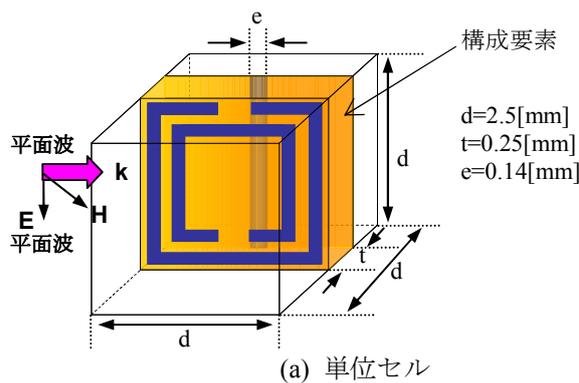
$$\epsilon = \frac{n}{Z} \epsilon_0, \quad \mu = nZ\mu_0 \quad (2)$$

ただし、式中の  $\epsilon_0$  及び  $\mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率及び透磁率である。

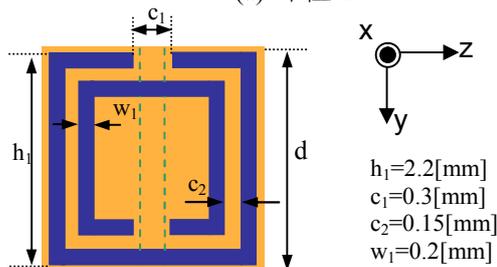
### 3 電磁界シミュレータによる特性解析

図2に示す構造を周期配列することで、負屈折率を示すことが Smith らによって既に実験的に確認されており、その屈折率及び特性インピーダンスの分散特性も図3の様になることが示されている[3]。そこで、この Smith らの結果を基準として、本論文で提案する推定法の妥当性を確認する。

次に、図1及び2に示されている構造の S パラメ



(a) 単位セル



(b) 構成要素

図2 メタマテリアルの単位セル例[3]

ータを電磁界シミュレータで実際に計算し、式(1)を計算機によって解いた結果を図4に示す。なお、電磁界シミュレーションにはAnsoft社のHFSSを用い、数値解析ツールには、MS-EXCELを用いた。図4の結果を見ると分かるように屈折率及び特性インピーダンスの分散特性は共に図3のSmithらの結果と異なっていた。

ここで、式(1)を数学的に解く際、多価関数である複素平方根や複素逆余弦関数 ( $\cos^{-1}x$ ) の数値計算が含まれ、複数の解の中からどの解を選ぶのかによって求まる屈折率及び特性インピーダンスの値は大きく異なってくる。一般的なプログラミング言語FORTRANや数値解析ツール内の組み込み関数では、解の存在範囲に制約を加えて多価関数の計算を行い、自動的に一つの解を選択する様になっている。この解選択時に不適切な解をとると、最終的に得られる結果には物理的な不合理が生じると考えられる。特に、MS-EXCEL内の組み込み関数では複素逆余弦関数を計算する際に、解の実部は  $0 \sim \pi$  の範囲となるように制限されており、それに対応した虚部を出力する。しかし、自然界において、このような制限は存在して居らず、媒質の屈折率の分散特性は発散点を除けば連続的に変化し、その虚部は正の値をとると思われる。

これまでの研究では、複数の多価関数の解を解析的に求め、単位セルの構造に対する物理的な洞察より、適切な解を選択して材料定数の推定を行ってきた。しかし、メタマテリアルの構成要素形状が複雑になればなる程、これまでの知識や常識だけでは、適切な解を見出すことが困難になってくる。そこで、本研究では多価関数の複素計算過程にチャートを導入し、複数の解の中から適切な解を一意的に決定する手法について検討する。

### 3.1 屈折率チャート

式(1)の屈折率  $n$  を算出する際に現れる複素逆余弦関数の複素指数を  $\alpha + j\beta$  とし、その解を  $x + jy$  とおくと次式を得る。

$$x + jy = \cos^{-1}(\alpha + j\beta) \tag{3}$$

ここで、三角関数の加法定理より次式を得る。

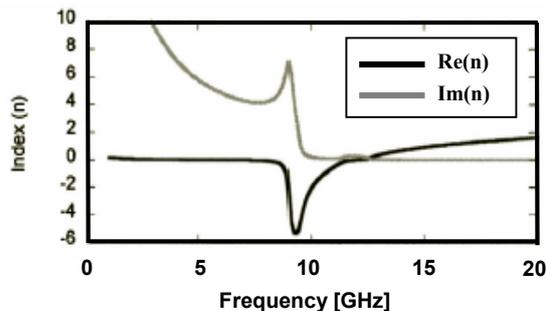
$$\begin{cases} \alpha = \cos x \cosh y \\ \beta = -\sin x \sinh y \end{cases} \tag{4}$$

上式を連立させて解くと、以下のような  $x$  及び  $y$  に関する2つの方程式が得られる。

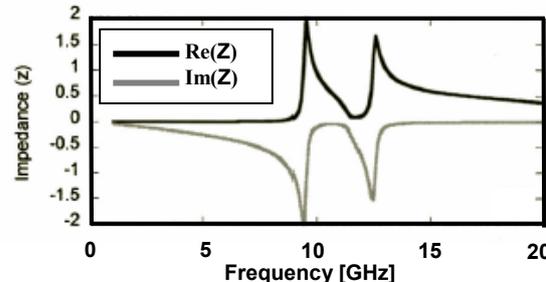
$$y = \cosh^{-1}\left(\frac{\alpha}{\cos x}\right) \tag{5}$$

$$y = \sinh^{-1}\left(-\frac{\beta}{\sin x}\right) \tag{6}$$

まず、式(5)中の  $\alpha$  を定数とした同方程式の曲線を  $xy$  平面上に描くと、図5中に実線で表す様な曲線群が得られる。同様に、式(6)中の  $\beta$  を定数として  $xy$  平面上に描くと図5中の破線で表される曲線群が得られる。この2つの曲線群からなるチャートを屈折率算出に用いる複素チャート(屈折率チャート)と呼

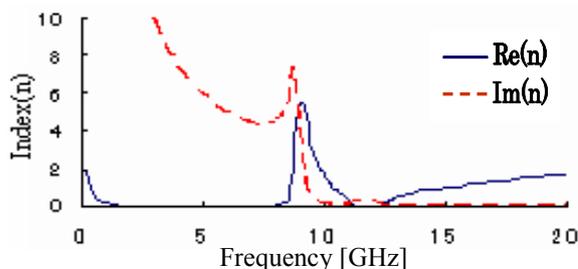


(a) 屈折率

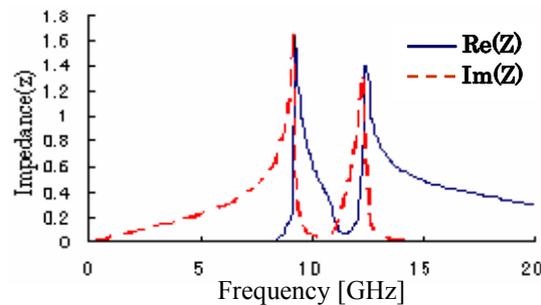


(b) 特性インピーダンス

図3 Smithの論文における結果[3]



(a) 屈折率



(b) 特性インピーダンス

図4 従来法によるシミュレーション結果

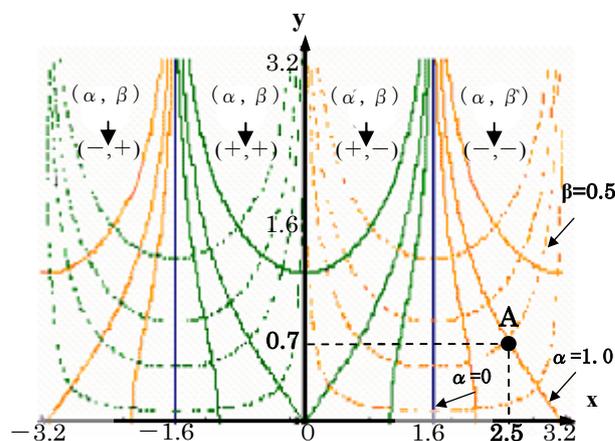


図5 屈折率チャート

ぶ。2つの曲線群は $\alpha$ または $\beta$ がある定数となる場所を表しているので、これらを等高線のように扱い、与えられた座標 $(\alpha, \beta)$ に点をプロットする。この点の $x$ 及び $y$ 座標を読み取れば、複素指数 $\alpha+j\beta$ に対する複素逆余弦関数の複素解が得られることになる。描画例として、図5中には、 $\alpha=1.0$ 及び $\beta=0.5$ 、すなわち複素指数 $1.0+j0.5$ の座標を点Aとしてプロットしている。この時の $x$ 及び $y$ 座標の値を読むと、 $x=2.5$ 及び $y=0.7$ となり、解は $2.5+j0.7$ となる。尚、図6の様描画範囲を拡大すれば、多価関数の複数の解が周期的に現れる。

図6は、チャートの $x$ 描画範囲を $-\pi \sim 2\pi$ まで広げたものである。同図において、I, II, III及びIVと記した領域は、それぞれ、同じ $\alpha$ 及び $\beta$ の組でプロットが可能な領域で、多価関数における複素解は同じ番号の領域内に1つずつの存在する。同図を見て分かるように屈折率チャートでの解は、 $m$ を整数として、原点及び点 $(x, y) = (\pm m\pi, 0)$ に対して点对称な座標で、 $x$ 方向に周期的に存在している。

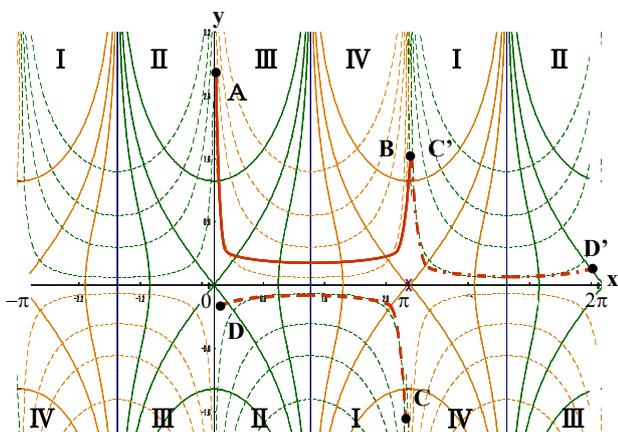


図6 屈折率チャート適用例

次に、これらのチャートの特性を利用し、実際に屈折率チャートの使用方法について説明する。例えば、屈折率チャート上に、観測周波数順にその時のSパラメータの値から式(1)で計算した、逆余弦関数の引数を求め、座標 $(\alpha, \beta)$ の点をプロットしていく。まず、初期値を第1象限の点Aに仮定し、出来るだけチャート上での点の軌跡が連続となるようにプロットしていくと、図中の実線が示す様な行程を経て点Bへと到達する。点Bの次の点をプロットする際、そのまま、 $x$ が $\pi$ 以下の範囲で点を探索すると図中の点Cへと点がジャンプする。この点を起点として、やはり点の軌跡が連続となるようにプロットしていくと波線の軌跡を通して点Dに到達する。ここで、点BとCでは軌跡に不連続が生じるが、このままでは屈折率を算出した際に屈折率が急激に変化する周波数が出現する。また、屈折率の虚部が負となることから、一般的な物理的に不合理である。そこで、チャートをもう一度見直すと、先にも述べたように複素解の存在領域は、点 $(\pm m\pi, 0)$ に対して点对称となっている。従って、点CからDの軌跡を点 $(+\pi, 0)$ に対して点对称な位置へと移動する。すると、図中

の点C'からD'の破線のようになり、点B及びCでの軌跡移動の傾きは連続ではないが、値としては連続となる。このような操作を繰り返し行うことで、点の軌跡は全て連続となり、結果適切な材料定数に到達できる。ただ、初期値である点Aの決定方法に関しては未だ曖昧さが残っている。

ここで、図1及び2の構造に対して、電磁界シミュレーションより解析的に求めたSパラメータに屈折率チャートを適用して屈折率の分散特性を求めた結果を図7に示す。同図は、チャート適用前の図4(a)とは異なり、図1(a)のSmithの結果とよく一致している。

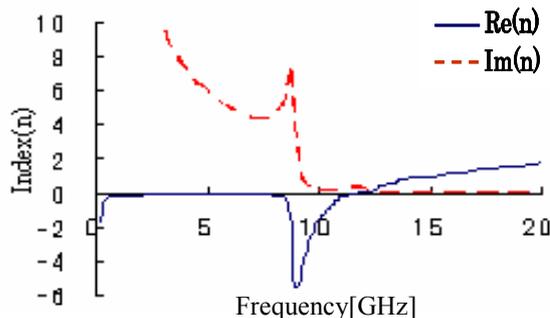


図7 媒質の屈折率 (チャート適用後)

### 3.2 特性インピーダンスチャート

屈折率と同様に、特性インピーダンスも複素計算過程にチャートを用い、解を求める。

先に述べたように特性インピーダンスは、式(1)で表される。式(1)の複素平方根中の実部を $a$ 、虚部を $b$ 、特性インピーダンスの実部を $\gamma$ 及び虚部を $\chi$ と置くと次式を得る。

$$Z = \pm\sqrt{a + jb} = \pm(\gamma + j\chi) \quad (7)$$

ただし、式(7)において、特性インピーダンスの実部は正でなければ、物理的に不合理があるので、複素平方根の実部 $\gamma$ が正の場合は+を、負の場合は-を選ぶ[4]。

次に式(7)の両辺を2乗して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} a &= \gamma^2 - \chi^2 \\ b &= 2\gamma\chi \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)を連立させて解くと、以下のような $\gamma$ 及び $\chi$ に関する2つの関係式が得られる。

$$\gamma = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (9)$$

$$\chi = b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2b^2}} \quad (10)$$

屈折率チャートの手法と同様に、 $\gamma\chi$ 平面上に式(9)における $a$ 及び式(10)における $b$ を定数として曲線を描くと、図8中に表されるような曲線群が得られる。このチャートを特性インピーダンスに対する複素チャート(特性インピーダンスチャート)と呼ぶ。この2つの曲線を等高線のように扱って、与えられた座標 $(a, b)$ をプロットする。この点の $\gamma$ 及び $\chi$ 座標

を読み取れば、 $a+jb$  の複素平方根の解を得ることができる。ただし、図8中の2本の  $a=0$  直線に囲まれた薄墨領域は、 $a$  及び  $b$  が共に正の領域であり、外側は  $a<0, b>0$  の領域である。描画例として、図8中には、 $a=-300$  及び  $b=700$  の座標を点 P 及び P' としてプロットしている。この時の  $\gamma$  及び  $\chi$  座標の値を読むと、 $\gamma=15.1$  及び  $\chi=22.9$  または  $-22.9$  となる。このように、複素平方根は多価関数で解は複数存在し、図8からもわかるように、 $\gamma$  軸対して軸対称な位置に解を持ち、実際の材料定数の分散特性まで解析することで、適切な材料定数を導く解の分布や規則性を類推することができる。

この特性インピーダンスチャートを、先のシミュ

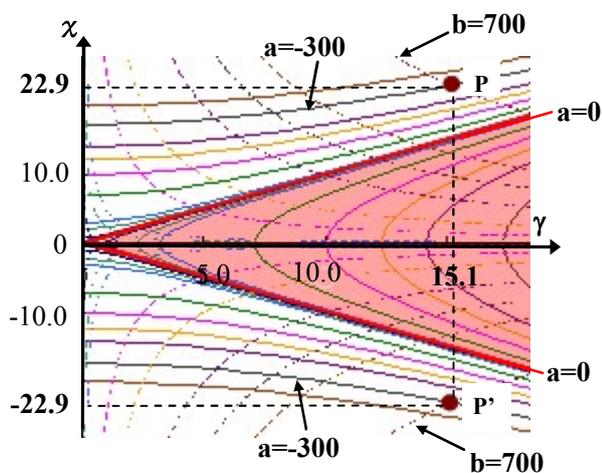


図8 特性インピーダンスチャート

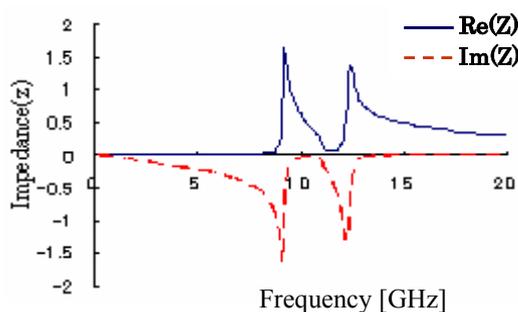


図9 媒質の特性インピーダンス (チャート適用後)

レーション結果に適用することで得られた特性インピーダンスを図9に示す。同図は、チャート適用前の図4(b)とは異なり、Smithの論文による結果とよく一致していることが確認できる。ここで、求めた屈折率及び特性インピーダンスを式(2)に代入し、材料定数を求めると図10のようになり、smithらの結果とよく一致している。

#### 4 まとめ

今回、Sパラメータから材料定数を推定する際、各チャートを用いることで、簡便に推定できる手法について検討を行った。図7及び9からも分かるように、各チャートの妥当性が確認できた。しかし、各チャートを描く際、初期値の設定方法に曖昧さが残っているので、今後は、初期値設定方法について検討を行っていく。

#### 謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金(基盤研究(C) no.18560335)の援助のもとで行われたものである。

#### 参考文献

- [1] V.G Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," Soviet Physics Uspekhi, vol.10, no.4 pp.509-514, 1968.
- [2] D.R.Smith, W.J.Padilla, D.C.Vier, S.C.Nemat-Nasser and S.Schultz, "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity", Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 18, pp.4184-4187, May 2000.
- [3] D.R.Smith, D.C.Vier, Th.Koschny and C.M.Soukoulis, "Electromagnetic parameter retrieval from inhomogeneous metamaterials", Phys. Rev. E, vol.71, no.036617, Mar. 2005.
- [4] X. Chen, T. M. Grzegorzczuk, Bae-Ian Wu, J. Pacheco, Jr., and J. A. Kong, "Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials", Phys. Rev. E, vol.70, no.016608, July 2004.

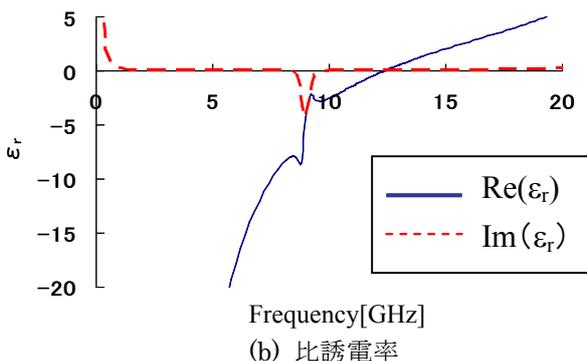
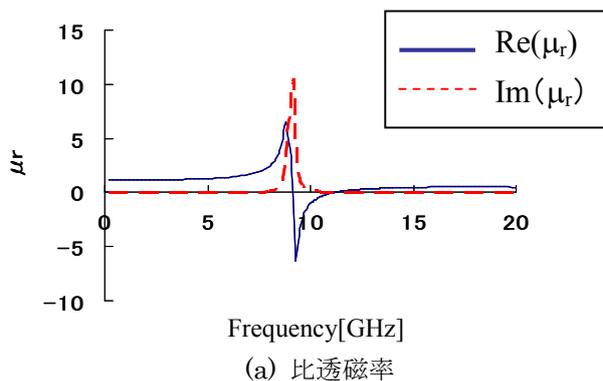


図10 材料定数