The 31th Symposium on Information Theory
and its Applications (SITA2008)
Kinugawa, Tochigi, Japan, Oct. 7–10, 2008

ガウス型通信路の容量に関する不等式について, II
On Inequality related to Capacity of Gaussian Channel, II

柳　研二郎*　　山下　範幸†
Kenjiro Yanagi　　Noriyuki Yamashita

Abstract— There are several inequalities related to capacity of Gaussian channel with feedback. We give an answer for unsolved problem under some condition. And also we give a new inequality in the case of $MA(1)$ Gaussian noise.

Keywords— Gaussian channel, capacity, feedback

1 はじめに

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える.

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均 0 のガウス過程、$S = \{S_n; n = 1, 2, \ldots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である. 通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする. したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ の函数であるとして表される. レート R, 長さ n の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \ldots, 2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n: \mathbb{R}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される. ただし W は $\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ とは独立である. 入力信号には平均電力制限が課せられる. 即ち

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である. またフィードバックは causal である. つまり $S_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ に従属している. 同様にフィードバックがない場合は $S_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ と独立である. フィードバックをもつ有限ブロック長容量は次のように定義される.

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I + B) R_X^{(n)} (I + B)^t + B R_Z^{(n)} B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる. 同様にフィードバックがないときには容量 $C_{n,Z}(P)$ は $B = 0$ としたときの最大値である. これらの条件の下で Cover and Pombra [6] は次を得た.

Proposition 1 (Cover and Pombra [6]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P) - \epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる. 逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P) + \epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0 \; (n \to \infty)$ が成り立たない. これはフィードバックをもたない場合も成り立つ.

$C_{n,Z}(P)$ は正確に得られている.

Proposition 2 (Gallager [10])

$$C_{n,Z}(P) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{k r_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k (\leq n)$ は $nP + r_1 + r_2 + \cdots + r_k > k r_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB,Z}(P)$ は正確には得られていないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([1],[2],[3], [4],[6],[8],[9],[14], [15],[17],[18],[19]). 以下計算の都合上、対数は自然対数を用いることにする.

2 Question

Definition 1 任意の $\alpha, \beta \geq 0 (\alpha + \beta = 1)$ と任意のガウス雑音 Z_1, Z_2 に対して $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_{Z_1} + \beta R_{Z_2}$ とおく. このときガウス雑音 $\tilde{Z}$ をもつ通信路を混合型ガウス型通信路という.

Question 1

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P)?$$

* 〒 755-8611 宇部市常盤台 2-16-1 山口大学 大学院 理工学研究科 応用数理科学分野 Division of Applied Mathematical Science, Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, Ube, 755-8611 Japan. E-mail: yanagi@yamaguchi-u.ac.jp, This research was partially supported by the ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003 and (C), 20540175

† 〒 753-8511 山口市吉田 1677-1 山口大学 大学院　理工学研究科 数理科学専攻 Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University, Yamaguchi, 753-8511 Japan. E-mail: k012va@yamaguchi-u.ac.jp,

今までは次の結果が得られている.

Theorem 1 (Yanagi-Chen-Yu [19])

$$C_{n,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,Z_1}(P) + \beta C_{n,Z_2}(P).$$

Theorem 2 (Yanagi-Chen-Yu [19]) $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ を満たす $P_1, P_2 \geq 0$ が存在して

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2).$$

が成り立つ.

Theorem 3 (Yanagi-Chen-Yu [19]) 次の (a) 又は (b) の条件があれば *Question 1* が成り立つ.

(a) R_{Z_1} の n 行 n 列を除いた部分行列と R_{Z_2} のそれが一致する.

(b) $\tilde{Z}$ がホワイト型である. 即ち $R_{\tilde{Z}}$ が対角行列である.

3 Kim の結果

Definition 2 $Z = \{Z_i; i = 1, 2, \ldots\}$ が *first order moving average Gaussian channel* であるとは次のような3つの同値な条件をみたすことである.

(1) $Z_i = U_i + \alpha U_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots,$ ただし $|\alpha| \leq 1$ で $U_i \sim N(0,1)$ は *i.i.d.* とする.

(2) *Spectral density function (SDF)* $f(\lambda)$ は次で与えられる.

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|1 + \alpha e^{-i\lambda}|^2 = \frac{1}{2\pi}(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\lambda).$$

(3) $Z_n = (Z_i, \ldots, Z_n) \sim N_n(0, K_Z),\ n \in \mathbb{N},$ ただし *covariance matrix* K_Z は次で与えられる.

$$K_Z = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

このとき Z の entropy rate は次のように計算される.

$$\begin{aligned} h(Z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\{4\pi^2 e f(\lambda)\} d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\{2\pi e|1 + \alpha e^{-i\lambda}|^2\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e) \quad \text{if} \quad |\alpha| \leq 1 \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e\alpha^2) \quad \text{if} \quad |\alpha| > 1. \end{aligned}$$

ここで最後の計算は次の Poisson's integral formula を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|e^{i\lambda} - \alpha| d\lambda &= 0 \qquad \text{if} \quad |\alpha| \leq 1, \\ &= \log|\alpha| \quad \text{if} \quad |\alpha| > 1. \end{aligned}$$

$MA(1)$ Gaussian noise をもつ Gaussian channel の capacity は次で与えられている.

$$C_{FB,Z}(P) = \lim_{n\to\infty} C_{n,FB,Z}(P).$$

最近 Kim は初めて feedback をもつ Gaussian channel の capacity を求めた.

Theorem 4 (Kim [12])

$$C_{FB,Z}(P) = -\log x_0,$$

ただし x_0 は次の４次方程式の正の唯一解である;

$$Px^2 = (1 - x^2)(1 - |\alpha|x)^2. \tag{1}$$

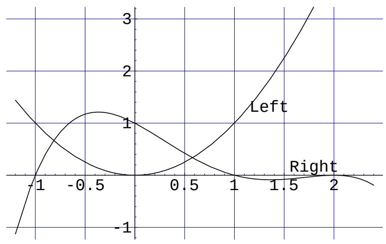

図 1: P = 1, $\alpha = 1/2$ の場合の (1) 式の右辺と左辺の関数のグラフ

4 Question 1 に関連する不等式

$Z \sim \mathrm{MA}(1, p),\ Z_i = U_i + pU_{i-1},\ 0 < p \leq 1$ かつ $W \sim \mathrm{MA}(1, q),\ W_i = U_i + qU_{i-1},\ 0 < q \leq 1$ とする. このとき

$$R_{\alpha Z + \beta W} \leq \alpha R_Z + \beta R_W \leq R_{\sqrt{\alpha}Z + \sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ. なぜなら

$$\alpha R_Z + \beta R_W = R_{\alpha Z + \beta W} + \alpha\beta R_{Z-W}$$

より

$$R_{\alpha Z + \beta W} \leq \alpha R_Z + \beta R_W.$$

また

$$\alpha R_Z + \beta R_W + \sqrt{\alpha\beta}(R_{ZW} + R_{WZ}) = R_{\sqrt{\alpha}Z + \sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ. 一方 $R_{ZW} + R_{WZ}$ は次のような行列になる.

$$\begin{pmatrix} 2+2pq & p+q & 0 & \cdots & 0 \\ p+q & 2+2pq & p+q & \cdots & 0 \\ 0 & p+q & 2+2pq & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p+q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+2pq \end{pmatrix}.$$

この行列の固有値 r_i は次のように表される.

$$\begin{aligned} r_i &= 2+2pq-2(p+q)\cos\frac{i\pi}{n+1} \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ &\geq 2+2pq-2(p+q) \\ &= 2(1-p)(1-q) \geq 0. \end{aligned}$$

したがって $R_{ZW}+R_{WZ} \geq 0$ となり

$$\alpha R_Z + \beta R_W \leq R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

である. したがって次のことがわかる.

Proposition 3 $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_Z + \beta R_W$ とする. このとき次が成り立つ.

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P) \leq C_{FB,\tilde{Z}}(P) \leq C_{FB,\alpha Z+\beta W}(P).$$

$V=\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W$ とすると

$$V_i = (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})U_i + (\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q)U_{i-1}.$$

ここで

$$Y_i = U_i + \frac{\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}U_{i-1}$$

とおくと

$$Y = \frac{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \sim \mathrm{MA}(1, \frac{\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})$$

である. このとき

$$\begin{aligned} & C_{n,FB,V}(P) \\ = \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+V}|}{|R_V|}; Tr[R_S] \leq nP\} \\ = \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|}{|R_{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|}; Tr[R_S] \leq nP\} \\ = \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}+Y}|}{|R_Y|}; \\ & Tr[R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}] \leq \frac{nP}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}\} \\ = \ & C_{n,FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}). \end{aligned}$$

よって

$$C_{FB,V}(P) = C_{FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).$$

次に

$$f(t,P) = \frac{1}{t} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-t^2}}$$

とおく. $f(a,P)=1, f(b,P)=0$ となる $0<a<b<1$ が unique にとれる. また $f(t,P)$ は $0<t<1$ で減少関数であるが convex ではないことがわかる. このとき Question 1 より弱い不等式が成り立つことが予想される.

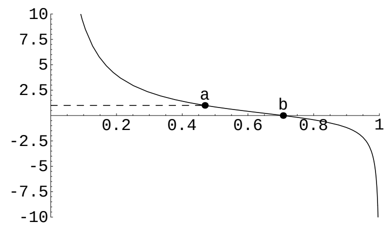

図 2: $f(t,1)$ の t の関数としてのグラフ

Question 2

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P) \leq \alpha C_{FB,Z}(P) + \beta C_{FB,W}(P)?$$

この論文では P,α,β の間にある関係があれば Question 2 が肯定的に成立することを証明する.

Theorem 5 P,α,β が

$$P \geq \frac{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-1}\left\{\frac{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-1}+2\right\} \qquad (2)$$

を満たすならば任意の $a \leq x, y \leq b$ に対して次が成り立つ.

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-x^2}}) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{y}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-y^2}})$$

$$\leq \frac{1}{x^\alpha y^\beta} - \frac{\sqrt{P}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{1-(x^\alpha y^\beta)^2}}.$$

5 Theorem 5 の証明

$$g(t,P) = t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right), \quad \frac{1}{b} \leq t \leq \frac{1}{a}$$

とおく. ただし $P>0$ に対して a,b は

$$\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} = 1,$$

$$\frac{1}{b} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-b^2}} = 0$$

を満たすものとする. このとき $0<a<b<1$ が成り立つことがわかる.

ここで $L=\sqrt{(1-a)^2(1-a^2)+a^2}$ とおくと

$$b = \frac{a}{L}, \quad P = \frac{L^2}{a^2} - 1$$

となり b,P はいずれも a のみの関数として表現される. このとき Theorem 5 に相当する次の Theorem を得る.

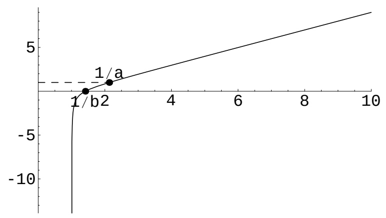

図 3: $g(t,1)$ の t の関数としてのグラフ

Theorem 6 *P, α, β が条件 (2) を満たすならば任意の t, s $(1/b \leq t \leq s \leq 1/a)$ に対して次の不等式が成り立つ.*

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(t,P) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(s,P) \\ \leq \ & g(t^\alpha s^\beta, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}). \end{aligned}$$

Theorem 6 の証明 $g(t,P)$ は t について concave function であるので

$$\begin{aligned} & \frac{s^\beta(t^\alpha - s^\alpha)}{t-s} g(t, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}) \\ + \ & \frac{t^\alpha(t^\beta - s^\beta)}{t-s} g(s, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}) \\ \leq \ & g(t^\alpha s^\beta, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(t,P) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(s,P) \qquad (3) \\ \leq \ & \frac{s^\beta(t^\alpha - s^\alpha)}{t-s} g(t, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}) \\ & + \frac{t^\alpha(t^\beta - s^\beta)}{t-s} g(s, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}) \end{aligned}$$

を示せばよい. ここで $0 < x < 1$ に対して

$$F(x) = (1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(\frac{1}{bx} - 1) - \frac{1-x^\alpha}{1-x} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

とおくと $F^{'}(x) < 0$ すなわち $F(x)$ は x に関して減少関数であることがわかる. この証明については Appendix を見よ. また条件 (2) より

$$\lim_{x \to 1-0} F(x) = (1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(\frac{1}{b} - 1) - \alpha + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \geq 0$$

が成り立つので $F(x) \geq 0$ が成立する. したがって $x = a/b$ とおくと

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(\frac{1}{a} - 1) \geq \frac{1-(a/b)^\alpha}{1-a/b} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}.$$

ここで

$$\max_{1/b \leq t \leq s \leq 1/a} \frac{1-(t/s)^\alpha}{1-t/s} = \frac{1-(a/b)^\alpha}{1-a/b}$$

だから

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(\frac{1}{a} - 1) \geq \frac{1-(t/s)^\alpha}{1-t/s} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}.$$

$0 < s(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}) - t(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}) < 1$ より

$$\begin{gathered} (1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(\frac{1}{a} - 1) \\ + \left(\frac{1-(t/s)^\alpha}{1-t/s} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \right) \\ \left(t(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}) - s(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}) \right) \geq 0. \end{gathered}$$

また $\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} = 1$ より

$$\begin{gathered} (1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} \\ + \left(\frac{1-(t/s)^\alpha}{1-t/s} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \right) \\ \left(t(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}) - s(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}) \right) \geq 0. \end{gathered}$$

さらに

$$0 < \frac{(t/s)^\alpha - 1}{t/s - 1} < 1$$

かつ

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \geq \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}} \geq \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}}$$

より

$$\begin{gathered} \left(\frac{(t/s)^\alpha - 1}{t/s - 1} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \right) \\ \left(t(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}) - s(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}) \right) \\ +(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) \\ \left\{ \frac{(t/s)^\alpha - 1}{t/s - 1} \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} + \left(1 - \frac{(t/s)^\alpha - 1}{t/s - 1} \right) \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}} \right\} \\ \geq 0. \end{gathered}$$

これを変形すると

$$
\begin{aligned}
& \frac{s^\beta(t^\alpha - s^\alpha)}{t-s} t \left(1 - \frac{\sqrt{P}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{t^2-1}}\right) \\
+ \quad & \frac{t^\alpha(t^\beta - s^\beta)}{t-s} s \left(1 - \frac{\sqrt{P}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{s^2-1}}\right) \\
\geq \quad & \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} t \left(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right) \\
+ \quad & \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} s \left(1 - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right).
\end{aligned}
$$

すなわち　(3) が成り立つ.　q.e.d.

Corollary 1 $\alpha \leq 1/2$ 又は $P \geq 3$ のとき任意の t, s $(1/b \leq t \leq s \leq 1/a)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(t,P) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(s,P) \\
\leq \quad & g(t^\alpha s^\beta, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).
\end{aligned}
$$

Corollary 1 の証明　$\alpha \leq \frac{1}{2}$ のときは明らか.
$\alpha > \frac{1}{2}$ のときは

$$
Y = \frac{\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-1}
$$

とおくと $0 \leq Y \leq 1$ となるので $P \geq Y(Y+2)$ より $P \geq 3$ を得る.

q.e.d.

次の Question が成り立つかどうかが問題となる.

Question 3 任意の P, α, β と任意の t, s $(1/b \leq t, s \leq 1/a)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(t,P) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} g(s,P) \\
\leq \quad & g(t^\alpha s^\beta, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2})?
\end{aligned}
$$

同じことではあるが任意の P, α, β と任意の x, y $(a \leq x, y \leq b)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} f(x,P) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} f(y,P) \\
\leq \quad & f(x^\alpha y^\beta, \frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2})?
\end{aligned}
$$

P, α, β が条件 (2) を満たさなくても Question が成り立つ例がある.

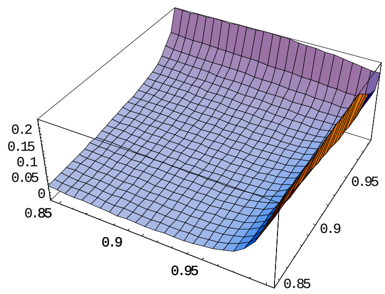

図 4: $P = 0.01, \alpha = 0.9$ のときの右辺ー左辺のグラフ

6　Appendix

$$
F'(x) = \frac{G(x)}{bx^2(1-x)^2},
$$

ただし

$$
G(x) = -(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(1-x)^2 + b(\alpha x^{\alpha+1} - x^2 + \beta x^{\alpha+2}).
$$

ここで

$$
\lim_{x \to 1-0} G(x) = b(\alpha - 1 + \beta) = 0
$$

である. また

$$
\begin{aligned}
G'(x) \quad = \quad & 2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})(1-x) \\
+ \quad & b(\alpha(\alpha+1)x^\alpha - 2x + (1-\alpha)(2+\alpha)x^{\alpha+1})
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\lim_{x \to 1-0} G'(x) = b(\alpha(\alpha+1) - 2 + (1-\alpha)(2+\alpha)) = 0
$$

である. さらに

$$
\begin{aligned}
G''(x) \quad = \quad & -2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) \\
+ \quad & b(\alpha^2(\alpha+1)x^{\alpha-1} - 2 + (1-\alpha^2)(2+\alpha)x^\alpha)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x \to 1-0} G''(x) \\
= \quad & -2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) \\
& + b(\alpha^2(1+\alpha) - 2 + (1-\alpha^2)(2+\alpha)) \\
= \quad & -2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) + b(\alpha - \alpha^2) \\
= \quad & -2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) + b\alpha\beta \\
\leq \quad & 0.
\end{aligned}
$$

また

$$
G''(0) = -2(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}) - 2b < 0
$$

であり

$$\begin{aligned} & G^{'''}(x) \\ = & -b\alpha^2(1-\alpha^2)x^{\alpha-2} + b\alpha(1-\alpha^2)(2+\alpha)x^{\alpha-1} \\ = & b\alpha(\alpha+2)(1-\alpha^2)x^{\alpha-2}(x - \frac{\alpha}{2+\alpha}). \end{aligned}$$

したがって $G^{''}(x) < 0$．よって $G^{'}(x)$ は減少関数である．$\lim_{x\to 1-0} G^{'}(x) = 0$ より $G^{'}(x) > 0$．したがって $G(x)$ は増加関数である．また $\lim_{x\to 1-0} G(x) = 0$ より $G(x) < 0$ である．よって $F^{'}(x) < 0$ である．ゆえに $F(x)$ は減少関数である．

参考文献

[1] H.W.Chen and K.Yanagi, On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback, IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.

[2] H.W.Chen and K.Yanagi, Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 1, pp 319-325, January 1999.

[3] H.W.Chen and K.Yanagi, Upper bounds on the capacity of discrete time blockwise white Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 3, pp 1125-1131, May 2000.

[4] H.W.Chen and K.Yanagi, The convex-concave characteristics of Gaussian channel capacity functions, IEEE Trans. Information Theory, vol 52, no 6, pp 2167-2172, 2006.

[5] T.M.Cover, Conjecture: Feedback does not help much, in Open problems in communication and computation, T.Cover and B.Gopinath (Ed.), pp 70-71, Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] T.M.Cover and S.Pombra, Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 1, pp 37-43, January 1989.

[7] T.M.Cover and J.A.Thomas, Elements of Information Theory, New York, Wiley, 1991.

[8] A.Dembo, On Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 5, pp 1072-1089, September 1989.

[9] P.Ebert, The capacity of the Gaussian channel with feedback, Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[10] R.G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[11] S.Ihara and K.Yanagi, Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II, Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[12] Y.H.Kim, Feedback capacity of the first-order moving average Gaussian channel, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 7, pp 3063-3079, 2006.

[13] Y.H.Kim, A counterexample to Cover's $2P$ conjecture on Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 8, pp 3792-3793, 2006.

[14] M.Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[15] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[16] K.Yanagi, Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, no 6, pp 1788-1791, November 1992.

[17] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.

[18] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III, Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure and Applied Mathematics, vol 45, pp 1-8, 1998.

[19] K.Yanagi, H.W.Chen and J.W.Yu, Operator inequality and its application to capacity of Gaussian channel, Taiwanese J. Math., vol 4, no 3, pp 407-416, 2000.

[20] K.Yanagi, J.W.Yu and I.F.Chao, On some inequalities for capacity in mixed Gaussian channels with feedback, Arch. Inequalities Appl., vol 2, pp 13-24, 2004.