

連行した水平横従動荷重を受ける梁の動的弾性安定解析

——初期応力を考慮した場合——

會田 忠義*・中山 高明**・細木 康夫***

Analysis of Dynamic Elastic Stability of Flexible Beams under Travelling Horizontal Follower Load Systems

Tadayoshi AIDA, Takaaki NAKAYAMA and Yasuo HOSOGI

Abstract

Dynamic stability of flexible beam under travelling horizontal follower load systems is investigated by applying the fundamental equation, governing the dynamic elastic stability, which is derived by using the linearized finite displacement theory. It is shown that the fundamental equation of the flexible beam under the above travelling load systems becomes Hill's equation and parametrically excited unstable coupled vibration occurs. Furthermore, the boundary frequency equations of simple parametric resonance are obtained by Bolotin's method and the stability maps of a simply supported beam are shown, as influenced by load mass and damping. Lastly, the behaviors of vibration of the beam in the vicinity of boundary of a main unstable region are examined by numerical integration.

1. まえがき

橋上を走行する列車の蛇行動、あるいはヨーイングによりレールから橋梁に及ぼす力は、レール面上、橋軸に直角に水平に作用するものと考えられている。その作用方向は、高速時にはヨーイングが卓越する事実に基づいて、下図のように、交互に反転する。これら

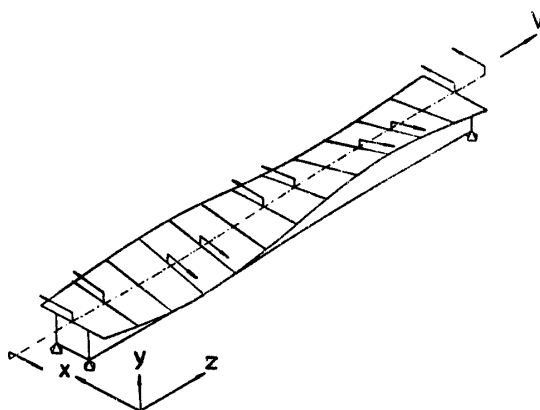


Fig. 1 Beam under travelling horizontal follower load system.

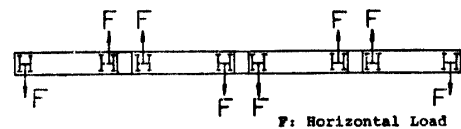


Fig. 2 Horizontal follower load system.

の横荷重は、梁がねじり回転するとき、その作用方向も回転する従動力になると考えられる。

本研究は、梁の変形が比較的大きい場合について、弾性安定問題の基礎方程式¹⁾を適用し、上記の荷重をモデル化した水平横従動荷重が連行するときの梁の動的安定性を明らかにするものである。荷重の従動性は、梁のねじれ回転にのみよると仮定する。この場合、基礎方程式は Hill 方程式になることを示し、係数励振不安定振動領域、特に、単純パラメトリック共振領域の境界振動数方程式を Bolotin の方法²⁾で求め、単純梁の安定性を示す。さらに、主領域の境界における振動挙動を数値積分により明らかにする。

2. 動的弾性安定問題の基礎方程式

Fig. 3 に示すように、薄肉断面の重心 G に原点を置く直角座標を設け、 x および y 軸を断面主軸に、 z 軸を梁軸に一致させる。せん断中心 S の変位を $(u_s,$

* 建設工学科

** 大学院土木工学専攻 (現・大林組(株))

*** 大学院土木工学専攻

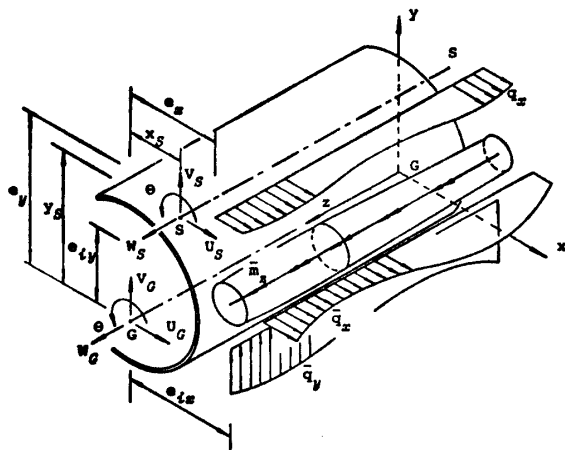


Fig. 3 Displacements and loads of beam and system of coordinates.

v_s, w_s), ねじり角を θ とする.

荷重は, 断面内の点 (e_x, e_y) に作用する水平荷重 $q_x(z)$ のみを考慮し, 断面内の (e_{ix}, e_{iy}) には x 軸方向に分布する付加質量を考慮する. 解析に当り, 梁断面の回軸慣性を無視し, 変位速度に比例する減衰力を考慮する. このとき, 基礎方程式は次式で表わされる.

$$\begin{aligned}
 & m \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_u \frac{\partial u_s}{\partial t} + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ Q_x^0 \left(\frac{\partial u_s}{\partial z} + y_s \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_x^0 \theta) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_z^0 \frac{\partial v_s}{\partial z}) - \bar{q}_x \right\} = 0 \\
 & m \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_v \frac{\partial v_s}{\partial t} + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_y^0 \theta) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (M_z^0 \frac{\partial u_s}{\partial z}) - q_x \theta - \bar{q}_y = 0 \\
 & \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \right) + \eta_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + EI_\omega^* \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (M_x^0 \beta_y - M_y^0 \beta_x + M_z^0 \beta_\omega) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} \\
 & + M_x^0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + M_y^0 \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (Q_x^0 \beta_x + Q_y^0 \beta_y - M_z^0 \beta_\omega) \theta - q_x (e_x - x_s) \theta - \bar{m}_z + \bar{q}_x (e_{iy} - y_s) - \bar{q}_y (e_{ix} - x_s) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

ここで

- m : 梁の単位長さ質量,
- μI_{ps} : 梁断面のせん断中心に関する質量の慣性モーメント,
- EI_{xx}, EI_{yy} : y 軸および x 軸に関する曲げ剛性,
- GK : ねじり剛性,
- EI_ω^* : 曲げねじり剛性,

$$\beta_x = -x_s + \frac{1}{2I_{xx}} \left(\int_A x y^2 dA + \int_A x^3 dA \right)$$

$$\beta_y = -y_s + \frac{1}{2I_{yy}} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right)$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega^*} \left(\int_A x^2 \omega_s dA + \int_A y^2 \omega_s dA \right)$$

ω_s : 断面のせん断中心に関する規準化されたサンプソンのそり関数,

Q_x^0 : 断面のせん断中心に作用する x 方向の初期せん断力,

Q_y^0 : 断面のせん断中心に作用する y 方向の初期せん断力,

M_x^0 : 断面の x 軸に関する初期曲げモーメント,

M_y^0 : 断面の y 軸に関する初期曲げモーメント,

M_z^0 : 断面のせん断中心に関する初期ねじりモーメント,

M_z^{s0} : 断面のせん断中心に関する初期そりモーメント

$$M_z^{s0} = -dM_z^0/dz,$$

η_u, η_v および η_θ : せん断中心の水平, 鉛直および回転変位速度に対する減衰係数,

\bar{q}_x, \bar{q}_y および \bar{m}_z : 荷重質量による付加慣性力およびモーメント,

ここでは, 初期断面力 M_z^{s0} および M_z^0 の影響を無視することとし,

$$\frac{\partial Q_x^0}{\partial z} = -q_x, \quad \frac{\partial M_y^0}{\partial z} = -Q_y^0, \quad \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial z^2} = q_x$$

$$\frac{\partial Q_y^0}{\partial z} = -q_y, \quad \frac{\partial M_x^0}{\partial z} = Q_x^0, \quad \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} = -q_y$$

.....(2.2)

なる関係を用いて整理すると, 基礎方程式は次式となる.

$$\begin{aligned}
 & m \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_u \frac{\partial u_s}{\partial t} + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + M_x^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} \theta + \frac{\partial^2 M_z^0}{\partial z^2} \frac{\partial v_s}{\partial z} + 2 \frac{\partial M_z^0}{\partial z} \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + M_z^0 \frac{\partial^3 v_s}{\partial z^3} - \bar{q}_x = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \eta_v \frac{\partial v_s}{\partial t} + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial z^2} \theta + 2 \frac{\partial M_y^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + M_y^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 M_z^0}{\partial z^2} \frac{\partial u_s}{\partial z} - 2 \frac{\partial M_z^0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} - M_z^0 \frac{\partial^3 u_s}{\partial z^3} - q_x \theta - \bar{q}_y = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \right) + \eta_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + EI_\omega^* \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2 \beta_y \frac{\partial M_x^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2 \beta_x \frac{\partial M_y^0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + M_x^0 \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + M_y^0 \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} - 2 \beta_y M_x^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + 2 \beta_x M_y^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + (\beta_x q_x + \beta_y q_y) \theta - q_x (e_x - x_s) \theta - \bar{m}_z + \bar{q}_x (e_{iy} - y_s) - \bar{q}_y (e_{ix} - x_s) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

以下に, 支間長 l の梁上を連続的に走行する水平荷重 q_x , 一定方向力 q_y と, これに伴う初期断面力

M_x, M_y および M_z ならびに付加慣性力 \bar{q}_x, \bar{q}_y および \bar{m}_z を示す。

水平横荷重 q_x は、交互に作用方向が逆になる従動集中荷重 $P \cos \omega t$ (P : 荷重振幅, ω : 荷重振動数) からなる Fig 4(a) に示す荷重列 (荷重間隔が a , 初期作用位置 a_0 , 走行速度が V である) を、一定方向力 q_y は、Fig. 4(b) に示すように同じ荷重位置、同一間隔および同一走行速度をもつ一定方向 W からなる荷重列を想定する。このとき、 q_x は $2a/V$ の、 q_y は a/V の周期をもつ関数となり、それぞれ次式で表わされる。

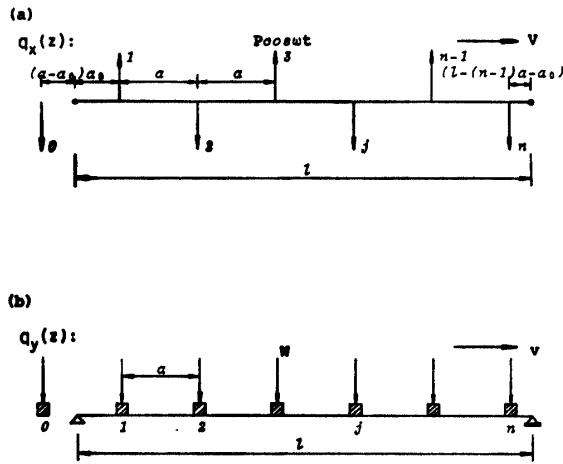


Fig. 4 Travelling horizontal follower load system.

$$q_x = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \delta \{z - \xi_1(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \delta \{z - \xi_1(t, j)\} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^j \delta \{z - \xi_2(t, j)\} & \dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \delta \{z - \xi_2(t, j)\} & \dots T_{s3} \leq t < T_{s4} \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \delta \{z - \xi_3(t, j)\} & \dots T_{s4} \leq t \leq T_{2b} \end{cases} \quad \dots (24)$$

$$q_y = \begin{cases} -W \sum_{j=1}^n \delta \{z - \xi_1(t, j)\} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ -W \sum_{j=1}^{n-1} \delta \{z - \xi_1(t, j)\} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ -W \sum_{j=1}^n \delta \{z - \xi_2(t, j)\} & \dots T_{s2} \leq t \leq T_b \end{cases} \quad \dots (25)$$

式中、 $\xi_m(t, j) = Vt + (j-m)a + a_0$, $T_{s1} = \{l - (n-1)a - a_0\}/V$, $T_{s2} = (a - a_0)/V$, $T_{s3} = \{l - (n-2)a - a_0\}/V$, $T_{s4} = (2a - a_0)/V$, $T_{2b} = 2a/V$, $T_b = a/V$, δ は Dirac の δ 関数である。ここで、荷重振動周期 $T = 2\pi/\omega$ が荷重移動周期 $T_{2p} = 2a/V$ の整数分の 1, すな

わち T_{2p} が T の整数倍である場合を想定する。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \alpha \omega_0, \quad \omega_0 = \pi V/a \\ \alpha &: \text{整数}, \quad \omega_0: \text{荷重移動振動数} \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.6)$$

M_y^0, M_x^0 および $M_z^0 = M_z^{0N} + M_z^{0C}$ (M_z^{0N} は従動荷重 q_x, M_z^{0C} は一定方向力 q_y による断面力を表わす。) はフーリエ級数を用いて次のように表示される。

$$M_y^0 = \begin{cases} \frac{2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 (-1)^{h-1} \sin(\omega_j t + \omega_j h_1) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \frac{2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 (-1)^{h-1} \sin(\omega_j t + \omega_j h_1) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ \frac{2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 (-1)^h \sin(\omega_j t + \omega_j h_2) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \\ \frac{2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 (-1)^h \sin(\omega_j t + \omega_j h_2) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s3} \leq t < T_{s4} \\ \frac{2P \cos \omega t}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 (-1)^{h-1} \sin(\omega_j t + \omega_j h_3) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s4} \leq t \leq T_{2p} \end{cases} \quad \dots (2.7)$$

$$M_x^0 = \begin{cases} \frac{2W}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \sin(\omega_j t + \omega_j h_1) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \frac{2W}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \sin(\omega_j t + \omega_j h_1) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ \frac{2W}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \sin(\omega_j t + \omega_j h_2) \sin \frac{j\pi z}{l} & \dots T_{s2} \leq t \leq T_b \end{cases} \quad \dots (2.8)$$

$$M_z^{0N} = \begin{cases} -P \cos \omega t (e_y - y_s) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} [\{1 + \xi_1(t, j)/l\} - U\{z - \xi_1(t, j)\}] & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ -P \cos \omega t (e_y - y_s) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} [\{1 + \xi_1(t, j)/l\} - U\{z - \xi_1(t, j)\}] & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ -P \cos \omega t (e_y - y_s) \sum_{j=1}^n (-1)^j [\{1 + \xi_2(t, j)/l\} - U\{z - \xi_2(t, j)\}] & \dots T_{s2} \leq t < T_{s3} \end{cases}$$

$$M_z^{0c} = \left\{ \begin{array}{l} -P \cos \omega t (e_y - y_s) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j [\{1 + \xi_2(t, j)/l\} \\ \quad - U\{z - \xi_2(t, j)\}] \quad \dots T_{s3} \leqq t < T_{s4} \\ -P \cos \omega t (e_y - y_s) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} [\{1 - \xi_3(t, j)/l\} \\ \quad - U\{z - \xi_3(t, j)\}] \quad \dots T_{s4} \leqq t \leqq T_{2b} \\ \\ -W(e_{ix} - x_s) \sum_{j=1}^n [\{1 - \xi_1(t, j)/l\} \\ \quad - U\{z - \xi_1(t, j)\}] \quad \dots 0 \leqq t < T_{s1} \\ -W(e_{ix} - x_s) \sum_{j=1}^{n-1} [\{1 - \xi_1(t, j)/l\} \\ \quad - U\{z - \xi_1(t, j)\}] \quad \dots T_{s1} \leqq t < T_{s2} \\ -W(e_{ix} - x_s) \sum_{j=1}^n [\{1 - \xi_2(t, j)/l\} \\ \quad - U\{z - \xi_2(t, j)\}] \quad \dots T_{s2} \leqq t \leqq T_p \end{array} \right. \quad \dots (2.9)$$

ここで、

$$\omega_j = j\pi V/l, \quad \omega_{jhm} = j\pi \{((h-m)\alpha + \alpha_0)/l, \\ U\{z - \xi_m(t, j)\} \text{ は, Heavside の Step-Function} \quad \dots (2.10)$$

荷重質量による付加慣性力は、上記の集中荷重が、それぞれ質量 M_0 、質量の慣性モーメント J_0 をもつとき周期 a/V をもつ周期関数となり、次式で表わされる。

$$\bar{q}_x = \left\{ \begin{array}{l} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \\ \quad \dots 0 \leqq t < T_{s1} \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \\ \quad \dots T_{s1} \leqq t < T_{s2} \\ -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_{iy} - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_2(t, j)\} \\ \quad \dots T_{s2} \leqq t \leqq T_p \end{array} \right. \\ \bar{q}_y = \left\{ \begin{array}{l} -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \\ \quad \dots 0 \leqq t < T_{s1} \\ -M_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \\ \quad \dots T_{s1} \leqq t < T_{s2} \\ -M_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_{ix} - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta\{z - \xi_2(t, j)\} \\ \quad \dots T_{s2} \leqq t \leqq T_b \end{array} \right. \\ \bar{m}_z = \left\{ \begin{array}{l} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \quad \dots 0 \leqq t < T_{s1} \\ -J_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta\{z - \xi_1(t, j)\} \quad \dots T_{s1} \leqq t < T_{s2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta\{z - \xi_2(t, j)\} \quad \dots T_{s3} \leqq t \leqq T_p \\ \dots (2.11) \end{array} \right.$$

3. 基礎方程式の解析

基礎方程式(2.3)の解を次式で近似表示する。

$$\left. \begin{array}{l} v_s = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) u_{sk}(z) \\ v_s = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t) v_{sk}(z) \\ \theta = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t) \theta_k(z) \end{array} \right\} \quad \dots (3.1)$$

式中、 $\rho_k(t)$ 、 $\sigma_k(t)$ および $\tau_k(t)$ は、時間に関する未知関数である。 $u_{sk}(z)$ および $v_{sk}(z)$ はそれぞれ梁の水平および鉛直曲げ振動の k 次の固有関数であり、 $\theta_k(z)$ は曲げねじり剛性を考慮した梁のねじり振動の k 次の固有関数である。

基礎方程式(2.4)および付加慣性力(2.11)に式(3.1)を代入し、固有関数の直交性を利用して整理すると、基礎方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} + \frac{M_0}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{uu} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} + \frac{y_s}{A_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ki}^{u\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \\ - \frac{M_0(e_{iy} - y_s)}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{u\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_u}{m} \frac{d\rho_k}{dt} + \omega_{uk}^2 \rho_k \\ + \frac{W}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{f}_{ki}^{uu} + 2\bar{g}_{ki}^{uu} + \bar{h}_{ki}^{uu}) \sigma_i \\ + \frac{P}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{f}_{ki}^{uv} + 2\bar{g}_{ki}^{uv} + \bar{h}_{ki}^{uv}) \sigma_i \\ + \frac{W}{mA_{kk}^u} \sum_{i=1}^{\infty} (f_{ki}^{u\theta} + 2g_{ki}^{u\theta} + h_{ki}^{u\theta}) \tau_i = 0 \\ \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} + \frac{M_0}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{vv} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} - \frac{x_s}{A_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ki}^{v\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} \\ + \frac{M_0(e_{ix} - x_s)}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{v\theta} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_v}{m} \frac{d\sigma_k}{dt} + \omega_{vk}^2 \sigma_k \\ - \frac{W}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{f}_{ki}^{vu} + 2\bar{g}_{ki}^{vu} + \bar{h}_{ki}^{vu}) \rho_i \\ - \frac{P}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{f}_{ki}^{vv} + 2\bar{g}_{ki}^{vv} + \bar{h}_{ki}^{vv}) \rho_i \\ + \frac{P}{mA_{kk}^v} \sum_{i=1}^{\infty} (f_{ki}^{v\theta} + 2g_{ki}^{v\theta}) \tau_i = 0 \\ \frac{m y_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ik}^{\theta u} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} - \frac{M_0(e_{iy} - y_s)}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{\theta u} \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} \\ - \frac{m x_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} C_{ik}^{\theta v} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} \\ + \frac{M_0(e_{ix} - x_s)}{\mu I_{ps} A_{kk}^{\theta}} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ik}^{\theta v} \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} + \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{J_s}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \sum_{i=1}^{\infty} D_{ki}^{00} \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \frac{\eta_s}{\mu I_{ps}} \cdot \frac{d\tau_k}{dt} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{\theta ki}^2 \tau_i \\
 & + \frac{W}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}^{00} \rho_i + \frac{P}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}^{00} \delta_i \\
 & - \frac{W \beta_y}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \sum_{i=1}^{\infty} (2f_{ki}^{00} + 2g_{ki}^{00} + h_{ki}^{00}) \tau_i \\
 & - \frac{P}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \sum_{i=1}^{\infty} \{ \beta_x (2f_{ki}^{00} + 2g_{ki}^{00} + h_{ki}^{00}) \\
 & - (e_x - x_s) h_{ki}^{00} \} \tau_i = 0 \quad k=1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned} \quad \dots(3.2)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 A_{ki}^0 &= \int_0^l a_k(z) a_i(z) dz, & \bar{B}_{ki}^0 &= \int_0^l a_k(z) a_i'''(z) dz, \\
 B_{ki}^0 &= \int_0^l a_k(z) a_i''(z) dz, & C_{ki}^{0b} &= \int_0^l a_k(z) b_i(z) dz \\
 D_{ki} &= \begin{cases} \sum_{j=1}^n \int_0^l \delta\{z - \xi_1(t, j)\} a_k(z) b_i(z) dz & \dots 0 \leq t < T_{s1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l \delta\{z - \xi_1(t, j)\} a_k(z) b_i(z) dz & \dots T_{s1} \leq t < T_{s2} \\ \sum_{j=1}^n \int_0^l \delta\{z - \xi_2(t, j)\} a_k(z) b_i(z) dz & \dots T_{s2} \leq t \leq T_p \end{cases} \\
 & \dots(3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_{uk}^2 &= \frac{EI_{xx}}{m} \left(\frac{\alpha_k}{l} \right)^4, & \omega_{vk}^2 &= \frac{EI_{yy}}{m} \left(\frac{\alpha_k}{l} \right)^4 \\
 \omega_{\theta ki}^2 &= \frac{EI_s \bar{B}_{ki}^0 - GKB_{ki}^0}{\mu I_{ps} A_{kk}^0} \\
 \alpha_k &: \text{曲げ振動の } k \text{ 次の固有値} \\
 J_s &= J_0 + M_0 \{ (e_{ix} - x_s)^2 + (e_{iy} - y_s)^2 \} \\
 & \dots(3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l M_x^0 a_k(z) b_i''(z) dz, \\
 \bar{f}_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l M_x^0 a_k(z) b_i'''(z) dz \\
 f_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l M_y^0 a_k(z) b_i''(z) dz, \\
 \bar{f}_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l M_y^0 a_k(z) b_i'''(z) dz \\
 g_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial M_x^0}{\partial z} a_k(z) b_i(z) dz, \\
 \bar{g}_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial M_x^0}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz \\
 g_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial M_y^0}{\partial z} a_k(z) b_i(z) dz, \\
 \bar{g}_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial M_y^0}{\partial z} a_k(z) b_i'(z) dz \\
 h_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{ki}^{abc} &= \frac{1}{W} \int_0^l \frac{\partial^2 M_x^0}{\partial z^2} a_k(z) b_i'(z) dz \\
 h_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial z^2} a_k(z) b_i(z) dz, \\
 \bar{h}_{ki}^{abN} &= \frac{1}{P} \int_0^l \frac{\partial^2 M_y^0}{\partial z^2} a_k(z) b_i'(z) dz \\
 & \dots\dots(3.5)
 \end{aligned}$$

上付き添字および積分記号中の a および b は座標関数 u_s, v_s あるいは θ を表す. $(\cdot)' = d/dz$ である.

式(3.2)は, 無限連立方程式となるが, 基礎方程式の解(3.1)を N 項からなる有限級数で近似し, マトリックス表示すると次式となる.

$$(A + A_M) \frac{d^2 f}{dt^2} + D \frac{df}{dt} + (B + WC_C + PC_N) f = O \quad \dots\dots(3.6)$$

ここで

$$f = \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \}^T \quad \dots\dots(3.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} [A_{1rs}] & [A_{2rs}] & [A_{3rs}] \\ [A_{4rs}] & [A_{5rs}] & [A_{6rs}] \\ [A_{7rs}] & [A_{8rs}] & [A_{9rs}] \end{bmatrix} r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots(3.8)$$

$$\begin{aligned}
 A_{1rs} &= A_{3rs} = A_{9rs} = \delta_{rs}, & A_{2rs} &= A_{4rs} = 0 \\
 A_{3rs} &= y_s C_{sr}^{\theta\theta} / A_{rr}^{\theta}, & A_{6rs} &= -x_s C_{rs}^{\theta\theta} / A_{rr}^{\theta} \\
 A_{7rs} &= m y_s C_{sr}^{\theta\theta} / \mu I_{ps} A_{rr}^{\theta}, & A_{8rs} &= -m x_s C_{rs}^{\theta\theta} / \mu I_{ps} A_{rr}^{\theta} \\
 \delta_{rs} &: \text{Kronecker の記号}
 \end{aligned}$$

$$A_M = \begin{bmatrix} [A_{M1rs}] & [A_{M2rs}] & [A_{M3rs}] \\ [A_{M4rs}] & [A_{M5rs}] & [A_{M6rs}] \\ [A_{M7rs}] & [A_{M8rs}] & [A_{M9rs}] \end{bmatrix} r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots(3.9)$$

$$\begin{aligned}
 A_{M1rs} &= M_0 D_{rs}^{u\theta} / m A_{rr}^{\theta}, & A_{M2rs} &= A_{M4rs} = 0, \\
 A_{M3rs} &= -M_0 (e_{iy} - y_s) D_{rs}^{u\theta} / m A_{rr}^{\theta}, \\
 A_{M5rs} &= M_0 / m A_{rr}^{\theta} \\
 A_{M6rs} &= M_0 (e_{ix} - x_s) D_{rs}^{v\theta} / m A_{rr}^{\theta} \\
 A_{M7rs} &= -M_0 (e_{iy} - y_s) D_{rs}^{v\theta} / \mu I_{ps} A_{rr}^{\theta} \\
 A_{M8rs} &= M_0 (e_{ix} - x_s) D_{rs}^{v\theta} / \mu I_{ps} A_{rr}^{\theta} \\
 A_{M9rs} &= J_s D_{rs}^{\theta} / \mu I_{ps} A_{rr}^{\theta}
 \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} [D_{1rs}] & [D_{2rs}] & [D_{3rs}] \\ [D_{4rs}] & [D_{5rs}] & [D_{6rs}] \\ [D_{7rs}] & [D_{8rs}] & [D_{9rs}] \end{bmatrix} r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots(3.10)$$

$$\begin{aligned}
 D_{1rs} &= \eta_u \delta_{rs} / m, & D_{5rs} &= \eta_0 \delta_{rs} / m, & D_{9rs} &= \eta_0 \delta_{rs} / \mu I_{ps} \\
 D_{2rs} &= D_{8rs} = D_{4rs} = D_{6rs} = D_{7rs} = D_{9rs} = 0
 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} [B_{1rs}] & [B_{2rs}] & [B_{3rs}] \\ [B_{4rs}] & [B_{5rs}] & [B_{6rs}] \\ [B_{7rs}] & [B_{8rs}] & [B_{9rs}] \end{bmatrix} r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots(3.11)$$

$$\begin{aligned}
 B_{1rs} &= \omega_{ur}^2 \delta_{rs}, & B_{5rs} &= \omega_{0r}^2 \delta_{rs}, & B_{9rs} &= \omega_{\theta rs}^2 \delta_{rs} \\
 B_{2rs} &= B_{8rs} = B_{4rs} = B_{6rs} = B_{7rs} = B_{9rs} = 0
 \end{aligned}$$

$$C_C = \begin{bmatrix} [C_{1rs}^C] & [C_{2rs}^C] & [C_{3rs}^C] \\ [C_{4rs}^C] & [C_{5rs}^C] & [C_{6rs}^C] \\ [C_{7rs}^C] & [C_{8rs}^C] & [C_{9rs}^C] \end{bmatrix} \quad r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots (3.12)$$

$$C_{1rs}^C = C_{3rs}^C = C_{6rs}^C = C_{8rs}^C = 0,$$

$$C_{2rs}^C = (\bar{f}_{rs}^{uv} C_r + 2\bar{g}_{rs}^{uv} C_r + \bar{h}_{rs}^{uv} C_r) / mA_{7r}^u$$

$$C_{3rs}^C = (f_{rs}^{u\theta} C_r + 2g_{rs}^{u\theta} C_r + h_{rs}^{u\theta} C_r) / mA_{7r}^u$$

$$C_{4rs}^C = -(\bar{f}_{rs}^{vu} C_r + 2\bar{g}_{rs}^{vu} C_r + \bar{h}_{rs}^{vu} C_r) / mA_{7r}^v$$

$$C_{7rs}^C = f_{rs}^{\theta u} C_r / \mu I_{ps} A_{7r}^{\theta}$$

$$C_{9rs}^C = -\beta_y (2f_{rs}^{\theta u} C_r + 2g_{rs}^{\theta u} C_r + h_{rs}^{\theta u} C_r) / \mu I_{ps} A_{7r}^{\theta}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{ki}^{abN} \\ g_{ki}^{abN} \\ h_{ki}^{abN} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{0ki}^{abN} \\ \hat{a}_{0ki}^{abN} \\ \tilde{a}_{0ki}^{abN} \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\begin{Bmatrix} \bar{a}_{pki}^{abN} \\ \hat{a}_{pki}^{abN} \\ \tilde{a}_{pki}^{abN} \end{Bmatrix} \cos p\omega_0 t + \begin{Bmatrix} \bar{b}_{pki}^{abN} \\ \hat{b}_{pki}^{abN} \\ \tilde{b}_{pki}^{abN} \end{Bmatrix} \sin p\omega_0 t \right)$$

.....(4.3)

$$C_N = \begin{bmatrix} [C_{1rs}^N] & [C_{2rs}^N] & [C_{3rs}^N] \\ [C_{4rs}^N] & [C_{5rs}^N] & [C_{6rs}^N] \\ [C_{7rs}^N] & [C_{8rs}^N] & [C_{9rs}^N] \end{bmatrix} \quad r, s=1, 2, \dots, N \quad \dots\dots (3.13)$$

$$C_{1rs}^N = C_{3rs}^N = C_{6rs}^N = C_{8rs}^N = 0$$

$$C_{2rs}^N = (\bar{f}_{rs}^{uN} N_r + 2\bar{g}_{rs}^{uN} N_r + \bar{h}_{rs}^{uN} N_r) / mA_{7r}^u$$

$$C_{3rs}^N = -(\bar{f}_{rs}^{vN} N_r + 2\bar{g}_{rs}^{vN} N_r + \bar{h}_{rs}^{vN} N_r) / mA_{7r}^v$$

$$C_{4rs}^N = (f_{rs}^{v\theta} N_r + 2g_{rs}^{v\theta} N_r) / mA_{7r}^v$$

$$C_{7rs}^N = f_{rs}^{\theta v} N_r / \mu I_{ps} A_{7r}^{\theta}$$

$$C_{9rs}^N = -\{\beta_x (2f_{rs}^{\theta v} N_r + 2g_{rs}^{\theta v} N_r + h_{rs}^{\theta v} N_r) - (e_x - x_s) h_{rs}^{\theta v} N_r\} / \mu I_{ps} A_{7r}^{\theta}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{ki}^{abC} \\ \bar{g}_{ki}^{abC} \\ \bar{h}_{ki}^{abC} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{0ki}^{abC} \\ \hat{a}_{0ki}^{abC} \\ \tilde{a}_{0ki}^{abC} \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\begin{Bmatrix} \bar{a}_{pki}^{abC} \\ \hat{a}_{pki}^{abC} \\ \tilde{a}_{pki}^{abC} \end{Bmatrix} \cos p\omega_0 t + \begin{Bmatrix} \bar{b}_{pki}^{abC} \\ \hat{b}_{pki}^{abC} \\ \tilde{b}_{pki}^{abC} \end{Bmatrix} \sin p\omega_0 t \right)$$

.....(4.4)

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{ki}^{abN} \\ \bar{g}_{ki}^{abN} \\ \bar{h}_{ki}^{abN} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{0ki}^{abN} \\ \hat{a}_{0ki}^{abN} \\ \tilde{a}_{0ki}^{abN} \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\begin{Bmatrix} \bar{a}_{pki}^{abN} \\ \hat{a}_{pki}^{abN} \\ \tilde{a}_{pki}^{abN} \end{Bmatrix} \cos p\omega_0 t + \begin{Bmatrix} \bar{b}_{pki}^{abN} \\ \hat{b}_{pki}^{abN} \\ \tilde{b}_{pki}^{abN} \end{Bmatrix} \sin p\omega_0 t \right)$$

.....(4.5)

式を(3.6)を解析することにより、荷重質量と初期応力を考慮した場合の梁の安定性が明らかにされる。

4. 連成振動の安定解析

式(3.6)中の係数 A_M および C_C は、 $T_p = a/V$ なる周期をもつが、 C_N は $T_{2p} = 2a/V$ なる周期をもつ。したがって、 $(A + A_M)^{-1}(B + WC_C + PC_N)$ は T_{2p} なる周期をもつこととなり、式(3.6)は Hill 方程式となる。

式(3.6)の係数マトリックス A_M , C_C および C_N に含まれる D_{ki}^{ab} (式3.3) および $\bar{f}_{ki}^{abC}, \dots, \bar{h}_{ki}^{abN}, f_{ki}^{abC}, \dots, h_{ki}$ を周期 T_{2p} をもつフーリエ級数に展開する。

$$D_{ki}^{ab} = \frac{1}{2} a_{0ki}^{ab} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{pki}^{ab} \cos p\omega_0 t + b_{pki}^{ab} \sin p\omega_0 t) \quad \dots\dots (4.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{ki}^{abC} \\ \bar{g}_{ki}^{abC} \\ \bar{h}_{ki}^{abC} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{0ki}^{abC} \\ \hat{a}_{0ki}^{abC} \\ \tilde{a}_{0ki}^{abC} \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\begin{Bmatrix} \bar{a}_{pki}^{abC} \\ \hat{a}_{pki}^{abC} \\ \tilde{a}_{pki}^{abC} \end{Bmatrix} \cos p\omega_0 t + \begin{Bmatrix} \bar{b}_{pki}^{abC} \\ \hat{b}_{pki}^{abC} \\ \tilde{b}_{pki}^{abC} \end{Bmatrix} \sin p\omega_0 t \right)$$

.....(4.2)

式(4.1)~(4.5)を式(3.6)に代入し整理すると、

$$\left[A + \left\{ \frac{A_{10}}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (A_{1p} \cos p\omega_0 t + A_{2p} \sin p\omega_0 t) \right\} \frac{d^2 f}{dt^2} + D \frac{df}{dt} + \left[B + W \left\{ \frac{C_{10}^C}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p}^C \cos p\omega_0 t + C_{2p}^C \sin p\omega_0 t) \right\} + P \left\{ \frac{C_{10}^N}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p}^N \cos p\omega_0 t + C_{2p}^N \sin p\omega_0 t) \right\} \right] f \right] = 0 \quad \dots\dots (4.6)$$

基礎方程式が Hill 方程式であることより、振動解を調和振動であるとして、不安定解の存在条件より、単純共振の不安定領域と安定領域の境界を表わす境界振動数方程式を求める (Bolotin 法)。Hill 方程式の解について、係数の周期と同じかあるいは2倍の周期をもつ周期解が、単純共振の不安定領域と安定領域を区分すること、さらに厳密にいうと、同じ周期をもつ2つの解が上記の不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている²⁾。

係数の周期 $T_{2p} = 2a/V$ ($\omega_0 = \pi V/a$) の2倍の周期をもつ解および周期 T_{2p} をもつ解をそれぞれ次式で表わす。

$$[A]_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 6^2 A & & & & \\ & & 4^2 A & & & \\ & & & 2^2 A & & \\ & & & & O & \\ \hline & & & & & 2^2 A \\ & O & & & & 4^2 A \\ & & & & & 6^2 A \\ \ddots & & & & & \end{pmatrix} \dots (4.17)$$

$$[B]_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & B & & & & \\ & & B & & & \\ & & & B & & \\ & & & & \frac{1}{2} B & \\ \hline & & & & & B \\ & & & & & B \\ & & & & & B \\ \ddots & & & & & \end{pmatrix} \dots (4.18)$$

$$[D]_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & & & & & 6D \\ & O & & & & 4D \\ & & & & & 2D \\ \hline & & & & O & \\ \hline & & -2D & & & \\ & & -4D & & & O \\ & & -6D & & & \\ \ddots & & & & & \end{pmatrix} \dots (4.19)$$

$$[A_M]_2 = \begin{pmatrix} \dots & 6^2(2A_0 + A_{16}) & 4^2(A_{11} + A_{15}) & 2^2(A_{12} + A_{14}) \\ \dots & 6^2(A_{11} + A_{15}) & 4^2(2A_0 + A_{14}) & 2^2(A_{11} + A_{13}) \\ \dots & 6^2(A_{12} + A_{14}) & 4^2(A_{11} + A_{13}) & 2^2(2A_0 + A_{12}) \\ \hline \dots & 6^2 A_{13} & 4^2 A_{12} & 2^2 A_{11} \\ \hline \dots & 6^2(A_{24} - A_{22}) & 4^2(A_{23} - A_{21}) & 2^2 A_{22} \\ \dots & 6^2(A_{25} - A_{21}) & 4^2 A_{24} & 2^2(A_{23} + A_{21}) \\ \dots & 6^2 A_{26} & 4^2(A_{25} + A_{21}) & 2^2(A_{24} + A_{22}) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ O & 2^2(A_{24} - A_{22}) & 4^2(A_{25} - A_{21}) & 6^2 A_{26} & \dots \\ O & 2^2(A_{23} - A_{21}) & 4^2 A_{24} & 6^2(A_{25} + A_{21}) & \dots \\ O & 2^2 A_{22} & 4^2(A_{23} + A_{21}) & 6^2(A_{24} + A_{22}) & \dots \\ \hline O & 2^2 A_{21} & 4^2 A_{22} & 6^2 A_{23} & \dots \\ \hline O & 2^2(2A_0 - A_{12}) & 4^2(A_{11} - A_{13}) & 6^2(A_{12} - A_{14}) & \dots \\ O & 2^2(A_{11} - A_{13}) & 4^2(2A_0 - A_{14}) & 6^2(A_{11} - A_{15}) & \dots \\ O & 2^2(A_{12} - A_{14}) & 4^2(A_{11} - A_{15}) & 6^2(2A_0 - A_{16}) & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \dots (4.20)$$

$$[C^C]_2 = \begin{pmatrix} \dots & (2C_0^C + C_{16}^C) & (C_{11}^C + C_{15}^C) & (C_{12}^C + C_{14}^C) \\ \dots & (C_{11}^C + C_{15}^C) & (2C_0^C + C_{14}^C) & (C_{11}^C + C_{13}^C) \\ \dots & (C_{12}^C + C_{14}^C) & (C_{11}^C + C_{13}^C) & (2C_0^C + C_{12}^C) \\ \hline \dots & C_{13}^C & C_{12}^C & C_{11}^C \\ \hline \dots & (C_{24}^C - C_{22}^C) & (C_{23}^C - C_{21}^C) & C_{22}^C \\ \dots & (C_{25}^C - C_{21}^C) & C_{24}^C & (C_{23}^C + C_{21}^C) \\ \dots & C_{26}^C & (C_{25}^C + C_{21}^C) & (C_{24}^C + C_{22}^C) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hline C_{13}^C & (C_{24}^C - C_{22}^C) & (C_{25}^C - C_{21}^C) & C_{26}^C & \dots \\ C_{12}^C & (C_{23}^C - C_{21}^C) & C_{24}^C & (C_{25}^C + C_{21}^C) & \dots \\ C_{11}^C & C_{22}^C & (C_{23}^C + C_{21}^C) & (C_{24}^C + C_{22}^C) & \dots \\ \hline C_0^C & C_{21}^C & C_{22}^C & C_{23}^C & \dots \\ \hline C_{21}^C & (2C_0^C - C_{12}^C) & (C_{11}^C - C_{13}^C) & (C_{12}^C - C_{14}^C) & \dots \\ C_{22}^C & (C_{11}^C - C_{13}^C) & (2C_0^C - C_{14}^C) & (C_{11}^C - C_{15}^C) & \dots \\ C_{23}^C & (C_{12}^C - C_{14}^C) & (C_{11}^C - C_{15}^C) & (2C_0^C - C_{16}^C) & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \dots (4.21)$$

$$[C^N]_2 = \begin{pmatrix} \dots & (2C_0^N + C_{16}^N) & (C_{11}^N + C_{15}^N) & (C_{12}^N + C_{14}^N) \\ \dots & (C_{11}^N + C_{15}^N) & (2C_0^N + C_{14}^N) & (C_{11}^N + C_{13}^N) \\ \dots & (C_{12}^N + C_{14}^N) & (C_{11}^N + C_{13}^N) & (2C_0^N + C_{12}^N) \\ \hline \dots & C_{13}^N & C_{12}^N & C_{11}^N \\ \hline \dots & (C_{24}^N - C_{22}^N) & (C_{23}^N - C_{21}^N) & C_{22}^N \\ \dots & (C_{25}^N - C_{21}^N) & C_{24}^N & (C_{23}^N + C_{21}^N) \\ \dots & C_{26}^N & (C_{25}^N + C_{21}^N) & (C_{24}^N + C_{22}^N) \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hline C_{13}^N & (C_{24}^N - C_{22}^N) & (C_{25}^N - C_{21}^N) & C_{26}^N & \dots \\ C_{12}^N & (C_{23}^N - C_{21}^N) & C_{24}^N & (C_{25}^N + C_{21}^N) & \dots \\ C_{11}^N & C_{22}^N & (C_{23}^N + C_{21}^N) & (C_{24}^N + C_{22}^N) & \dots \\ \hline C_0^N & C_{21}^N & C_{22}^N & C_{23}^N & \dots \\ \hline C_{21}^N & (2C_0^N - C_{12}^N) & (C_{11}^N - C_{13}^N) & (C_{12}^N - C_{14}^N) & \dots \\ C_{22}^N & (C_{11}^N - C_{13}^N) & (2C_0^N - C_{14}^N) & (C_{11}^N - C_{15}^N) & \dots \\ C_{23}^N & (C_{12}^N - C_{14}^N) & (C_{11}^N - C_{15}^N) & (2C_0^N - C_{16}^N) & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \dots (4.22)$$

式(4.9)および(4.10)が単純パラメトリック共振領域の境界振動数方程式である。この式より、不安定領域の境界における走行速度 V 、荷重振幅 P 、荷重振動数 ω 、荷重間隔 a および荷重質量などを定めることができる。

5. 単純梁の動的安定性

5.1 安定図

単純梁の動的不安定領域を上述の方法にしたがって

求める。単純梁では、式(3.1)の座標関数 u_{sk}, v_{sk} および θ_k は次式で表わされる。

$$u_{sk} = v_{sk} = \theta_k = \sin k\pi z/l \quad \dots\dots(5.1)$$

Fig. 5 に示す π 断面で、次に示す断面寸法および幾何定数をもつ単純梁を対象とする。

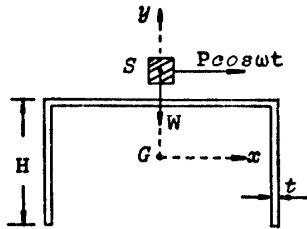


Fig. 5 Cross-section of simply supported beam.

$$t/H=0.02, b/H=1.5, H/l=0.05, x_s/H=0, y_s/H=0.685686, I_{yy}/I_{xx}=0.270934, AH^2/I_{ps}=1.01949, \{EI_s^2(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\} / \{H^2EI_{xx} \times (\pi/l)^4\} = 0.111881$$

計算に当って、せん断中心に q_x が作用する場合を想定したので、初期断面力中 M_x^0 と M_y^0 のみを考慮した。また振動解(3.1)の座標関数は一次の固有関数のみを取り、境界振動数方程式(4.9)の計算では、Hill方程式の解(4.7)の第2項 ($\zeta=1.3$) までを取り、境界振動数方程式(4.10)の計算では、解(4.8)の第2項 ($\zeta=2, 4$) を取った。初期応力 M_y^0 および M_x^0 のフーリエ級数(2.7), (2.8)は30項までを用い、式(4.1)~(4.5)の級数は4項 ($p=1\sim 4$) までを用いた。

以下、荷重振動数、荷重間隔(梁上の荷重数)および荷重質量の影響を示す。図中、縦軸は無次元荷重 $P_* = P / \{EI_s^2(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\}$ を、横軸は荷重移動振動数 ω_* を平均荷重作用時の梁の第1固有値 Ω_1 の2倍で除した無次元振動数 $\omega_* = \omega_0 / 2\Omega_1$ を表わす。ここで、 Ω_1 は運動方程式

$$\left(A + \frac{A_{10}}{2} \right) df/dt^2 + \left(B + \frac{W}{2} C_{10}^c + \frac{P}{2} C_{10}^N \right) f = 0 \quad \dots\dots(5.2)$$

の第1固有値で、第2および第3固有値をそれぞれ Ω_2 および Ω_3 とする。第1次モードはねじり振動が卓越し、第2および3次モードはそれぞれ鉛直および水平振動が卓越する。

減衰定数 h は、各振動モードに対して一定である場合 ($h = h_u = h_v = h_\theta$) を想定し、本研究では $h = 0.01, 0.05$, および 0.10 の場合について解析した。減衰定数と減衰係数の関係は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \eta_u &= 2mh_u\omega_u, \quad \eta_v = 2mh_v\omega_v, \\ \eta_\theta &= 2\mu I_{ps}h_\theta\omega_\theta \end{aligned} \quad \dots\dots(5.3)$$

ここで

- h_u, h_v : 水平および鉛直振動の卓越するモードに対する減衰定数
- h_θ : ねじり振動の卓越するモードに対する減衰定数
- ω_u, ω_v : 水平および鉛直振動の卓越する固有円振動数
- ω_θ : ねじり振動の卓越する固有円振動数

(荷重振動数の影響)

荷重質量を無視し、無次元荷重間隔 $a/l=1.05$ ($a_0/l=0.50$) の場合の単純共振の係数励振不安定領域を Fig. 6 に示す。図には、荷重振動数 ω が $0, \omega_0, 2\omega_0$

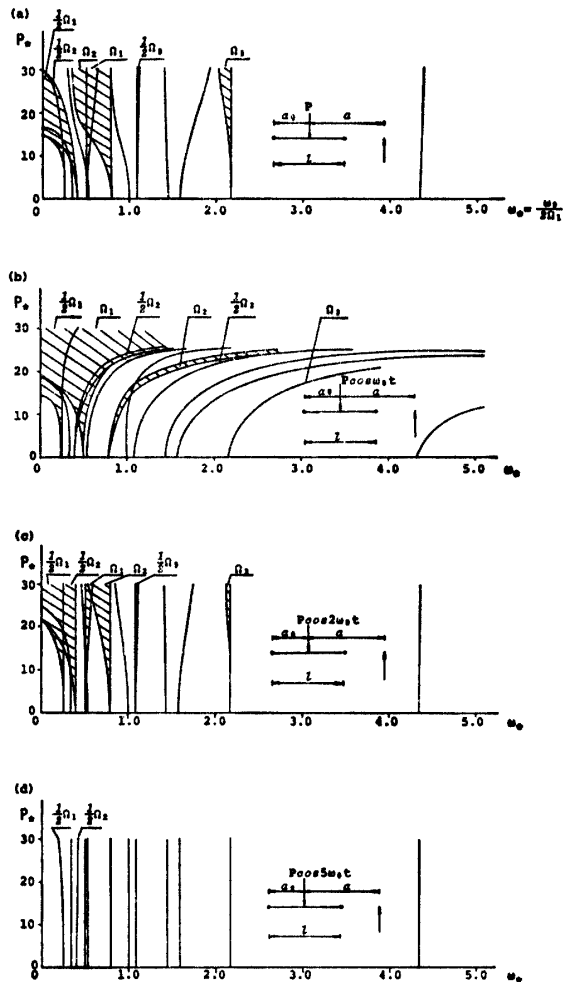


Fig. 6 Regions of simple parametric instability of beam under travelling harmonic horizontal follower load systems with various values of ω when load interval $a_0/l=0.50, a/l=1.05$ and load mass is neglected. (a) $\omega=0$; (b) $\omega=\omega_0$; (c) $\omega=2\omega_0$; (d) $\omega=5\omega_0$.

および $5\omega_0$ の場合の領域を示す。図中、斜線部が不安定領域である。この図より明らかなように ω_0 が $\Omega_n/2$ または $\Omega_n (n=1, 2, 3)$ の近傍での領域が広く、不安定振動が起りやすいことがわかる。また荷重振動数 ω が ω_0 に等しいときの領域が最も大きい。実橋の問題では、列車蛇行動がこの場合に相当するので、注意が必要である。

(梁上の荷重数の影響)

荷重質量を無視し、荷重振動数 ω が荷重移動振動数 ω_0 に等しい場合の、梁に作用する荷重数の変化にともなう領域の変化状態を Fig. 7 に示す。図中、 $a/l=1.05$ は梁上の集中荷重が1個の場合で、 $a/l=0.50$ および 0.20 はそれぞれ2個および5個の場合である。図より明らかなように、荷重数の増加にともなって不安定領域は狭くなる。

(減衰の影響)

Fig. 7 には、同時に減衰による不安定領域の変化状態も示した。図中、実線は減衰定数 $h=0$ の場合、破

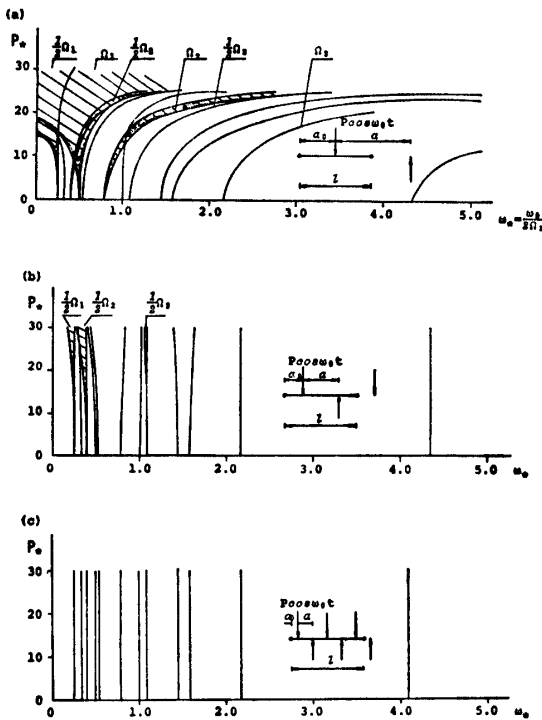


Fig. 7 Damped and undamped stable regions of simple parametric instability for a simply supported beam under travelling periodic horizontal follower load systems with various values of load interval when $\omega=\omega_0$ and load mass is neglected. (a) $a_0/l=0.50$ and $a/l=1.05$; (b) $a_0/l=0.25$ and $a/l=0.5$; (c) $a_0/l=0.10$ and $a/l=0.20$. —, $h=0.0$; ----, $h=0.01$; -·-·-, $h=0.05$; ·····, $h=0.10$.

線は $h=0.01$, 一点鎖線は $h=0.05$, 二点鎖線は $h=0.1$ の場合の境界線である。この図より、減衰定数 h が増加するにともなって不安定領域は狭小化し、安定領域が広がることわかる。

(荷重質量の影響)

荷重振動数 $\omega=0$ で、 $a/l=1.05$, $a_0/l=0.50$ (梁上の集中荷重数が1個) の場合、荷重の質量を考慮することによる不安定領域の変化の状況を Fig. 8 に示す。

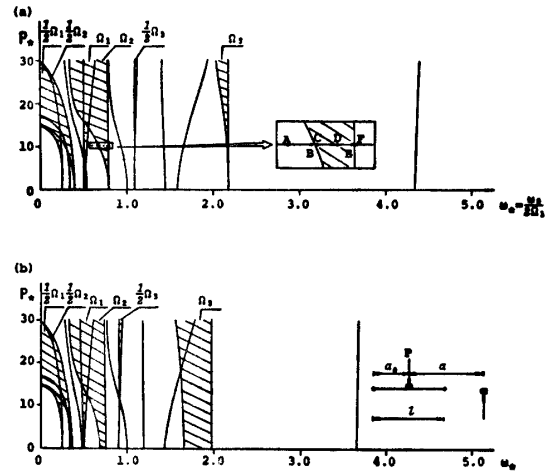


Fig. 8 Regions of simple parametric instability of beam under travelling constant horizontal follower load systems with various values of load mass when load interval $a_0/l=0.50$ and $a/l=1.05$. (a) $M_0=0$ and $J_0=0$; (b) $M_0/l_m=0.2586332$ and $J_0/\mu I_{os}l=0.0109863$.

(a)図は荷重質量を無視した場合、(b)図は考慮した場合である。図より、荷重質量を考慮すると不安定領域は拡大し、不安定化することがわかる。

5.2 振動挙動

以上、Bolotin の方法による係数励振不安定振動領域を示したが、次に、この領域内および境界近傍の振動挙動を明らかにする。応答計算に Runge-Kutta-Gill 法を適用し、式(5.2)を数値解析することにより、振動変位の時間的経過を明らかにした。積分に当って、時間きざみは最小固有周期の4%を用いた。

解析は、上記単純梁上を無次元荷重間隔 $a/l=0.05$, 荷重振動数 $\omega=0$ の場合の $\omega_{10}=\Omega_2$ 近傍の不安定領域内外の点 A, B, C, D, E, F について求めた。各点はそれぞれ、安定領域点 A ($\omega_*=0.60$), B ($\omega_*=0.665$), 不安定領域点 C ($\omega_*=0.685$), D ($\omega_*=0.735$), E ($\omega_*=0.780$) および安定領域点 F ($\omega_*=0.80$) でスパン中央の水平変位の挙動を荷重移動周期 $T_{2p}=2a/V$ の20倍

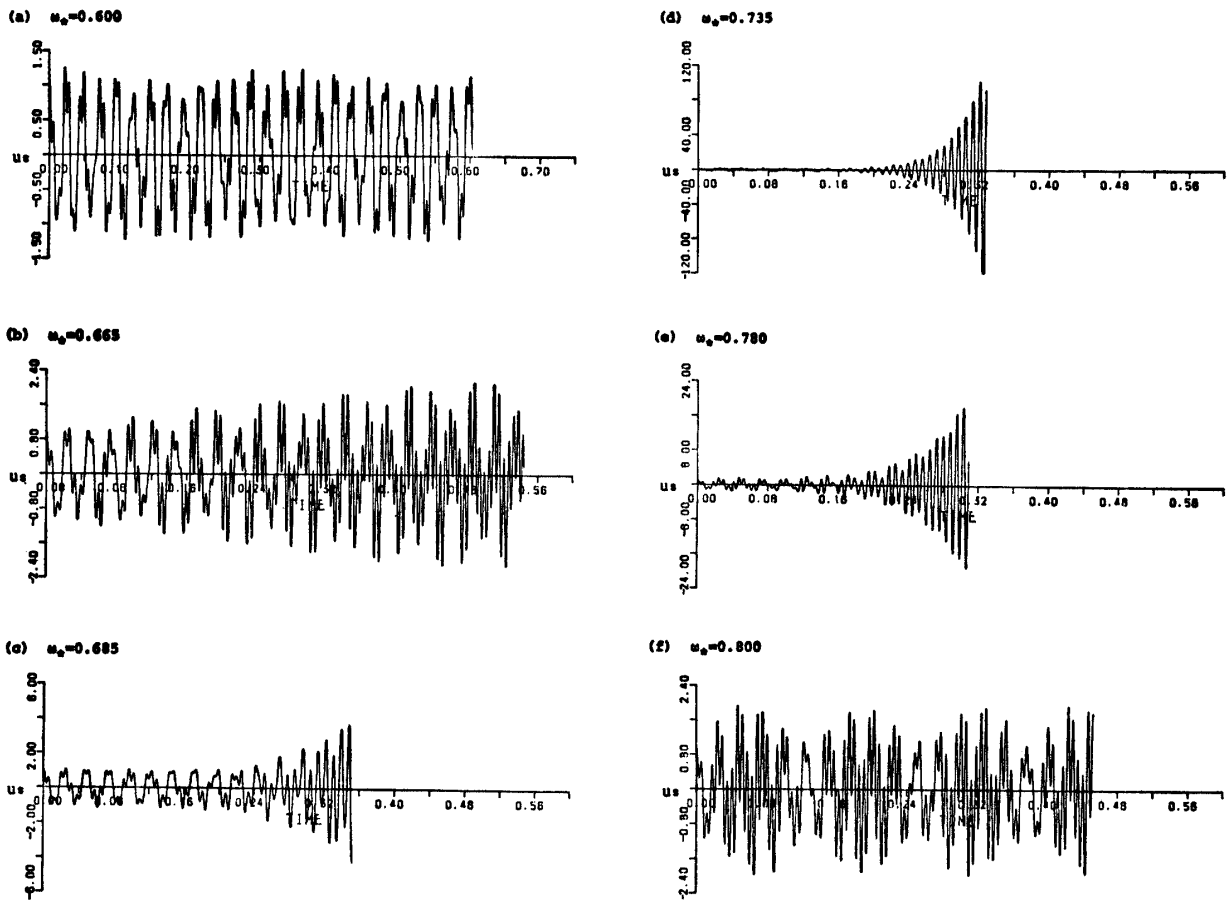


Fig. 9 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system when load interval $a_0/l=0.50$, $a/l=1.5$, $\omega=0$, $P_*=10.0$ and load mass is neglected. (a) $\omega_*=0.600$; (b) $\omega_*=0.665$; (c) $\omega_*=0.685$; (d) $\omega_*=0.735$; (e) $\omega_*=0.780$; (f) $\omega_*=0.800$.

以上の時間内について求めた。最初に 1.0 の水平変位を生じさせておき、それが時間の経過とともにどのように推移するかを各点について図示したのが Fig. 9 である。図中、縦軸は水平変位、横軸は時間である。各図から明らかのように、Bolotin 法による係数励振不安定領域と数値積分による応答解析は一致し、Bolotin 法による単純パラメトリック共振領域の算定が適確であることが明らかとなった。

6. 結 び

水平の連行走行従動荷重を受ける梁の動的弾性安定性を明らかにするに当り、梁の変形が比較的大きい場合について、弾性安定問題の基礎方程式が Hill 方程式になり、係数励振不安定振動が起ることを示した。また梁系の動的不安定性の解析に有用な単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を Bolotin の方法を用いて求め、提示した。適用例として、単純梁のせん断

中心に荷重が作用するときの単純共振不安定領域を明らかにした。さらに、数値解析 (Runge-Kutta-Gill 法) することによって振動挙動を求め、領域の確認を行った。その他、荷重振動数、梁上の荷重数、荷重質量および減衰の影響を示した。

参 考 文 献

- 1) T.Aida : Basic Equations and Boundary Conditions of Dynamic Elastic Stability for Thin Walled Structural Members Subjected to Follower loads, Technology Reports of the Yamaguchi Univ. 3, 117~128 (1983)
- 2) Bolotin, V.V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco, Holden-Day, (1964)

(昭和59年 4 月13日受理)